$\forall x \in [0,1]$, $|B(f,g)(x)| = \left| \int_0^x e^t f(t) g(t)\, dt \right|$

$$\underset{①}{\leq} \int_0^x e^t |f(t)|\,|g(t)|\, dt$$

$$\underset{②}{\leq} \|f\|_\infty \int_0^x e^t |g(t)|\, dt$$

$$\underset{C\text{-}S\,③}{\leq} \|f\|_\infty \left(\int_0^x e^{2t}\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |g(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_\infty \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)} \cdot \|g\|_2$$

D'où $\boxed{\|B(f,g)\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}\ \|f\|_\infty \|g\|_2}$ (*)

ce qui montre que B est continue

Montrons que $\sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}$ est la norme de cette applicat° bilinéaire en montrant que pour un bon choix de (f,g), (*) est une égalité.

Pour avoir égalité dans ①, on a besoin que $e^t f(t) g(t)$ ne change pas de signe et pour avoir égalité dans ②, que $|f|$ soit constante. Enfin, pour ③ (égalité dans C-S) on a besoin que g soit colinéaire à $t \mapsto e^t$.

Posons donc $f : t \mapsto 1$ (cste) et $g : t \mapsto e^t$.

Alors
- $\forall x \in [0,1]$, $B(f,g)(x) = \int_0^x e^{2t}\, dt = \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$

  d'où $\|B(f,g)\|_\infty = \frac{1}{2}(e^2-1)$
- $\|f\|_\infty = 1$
- $\|g\|_2 = \left(\int_0^1 |g(t)|^2\, dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}$

Donc (*) est une égalité !