$\boxed{\text{TD3 ex3}}$ 1. • D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange (ex 6) ; pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, disons $t > 0$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$|f(\tfrac{t}{n}) - \underbrace{f(0) - \tfrac{t}{n} f'(0)}_{=0}| \leq \|f''\|_{\infty, [0, \frac{t}{n}]} \frac{(\frac{t}{n} - 0)^2}{2!}$$

donc $\forall n \geq 1$, $$|f(\tfrac{t}{n})| \leq \underbrace{\left(\|f''\|_{\infty, [0,t]} \frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{n^2}}_{\text{terme général d'une série de Riemann convergente.}}$$

Donc $\left(f(\frac{t}{n})\right)_{n \geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{T \text{ est bien définie}}$

• Montrons que T est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, disons $t \geq 0$, pour écrire les intervalles dans le bon sens.

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \left(\frac{f(\frac{t+h}{n}) - f(\frac{t}{n})}{h}\right)_{n \geq 1}$$

Or pour tout $n \geq 1$, $$\frac{f(\frac{t+h}{n}) - f(\frac{t}{n})}{h} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{f(\frac{t}{n} + \frac{h}{n}) - f(\frac{t}{n})}{\frac{h}{n}}}_{\xrightarrow[h \to 0]{} f'(\frac{t}{n})}$$

car f est dérivable en $\frac{t}{n}$

Soit $u := (u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n} f'(\frac{t}{n})$

Montrons que $\left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - u \right\|_{\ell^1(\mathbb{N}^*,\mathbb{R})} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

(ce qui montrera que T est dérivable en t et que $T'(t) = u$).

On a $\left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - u \right\|_{\ell^1} = \sum_{n\geq 1} \left| \frac{f(\frac{t}{n}+\frac{h}{n}) - f(\frac{t}{n})}{h} - \frac{1}{n} f'(\frac{t}{n}) \right|$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{|h|} \underbrace{\left| f(\tfrac{t}{n}+\tfrac{h}{n}) - f(\tfrac{t}{n}) - \tfrac{h}{n} f'(\tfrac{t}{n}) \right|}_{\leq \|f''\|_{\infty,[0,t+1]} \frac{(\frac{h}{n})^2}{2}}$$

dès que $|h| \leq 1$. En effet,

$\frac{t}{n} \in [0,t]$, $\frac{h}{n} \in [0,1]$ pour tout $n \geq 1$

donc $\left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - u \right\|_{\ell^1} \leq \frac{\|f''\|_{\infty,[0,t+1]} |h|}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Le cas $t<0$ se traite de manière similaire.

2. • T est <u>bien définie</u> car comme $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(\cdot - t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (on a juste translaté son support).

• <u>Montrons que T est continue</u>. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrons la continuité en t_0.

Pour tout $t \geq t_0$,

$T(t) - T(t_0) = f(\cdot - t) - f(\cdot - t_0)$: et on veut contrôler l'écart en $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|T(t)(x) - T(t_0)(x)| = |f(x-t) - f(x-t_0)|$$

$$\underset{\text{IAF}}{\leq} \|f'\|_{\infty, [x-t, x-t_0]} \left(x - t_0 - (x-t) \right)$$

$$\leq \underbrace{\|f'\|_{\infty, \mathbb{R}}}_{\text{existe car } f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} (t - t_0) \quad : \text{indépendant de } x$$

Donc $\|T(t) - T(t_0)\|_\infty \leq \|f'\|_{\infty,\mathbb{R}} (t - t_0) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$

ce qui montre la continuité à droite de T en t_0.
La continuité à gauche se montre de la même manière.

• Montrons que T est dérivable en 0 :

$$\forall h \neq 0, \quad \frac{T(h)-T(0)}{h} = \frac{f(\cdot-h)-f(\cdot)}{h}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{T(h)-T(0)}{h}\right)(x) = \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -f'(x)$$

donc notre candidat pour être la limite du taux d'accroissement $\frac{T(h)-T(0)}{h}$ est $-f'$ ($\in E$ car $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

Montrons que $\left\| \frac{T(h)-T(0)}{h} - (-f') \right\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{T(h)(x)-T(0)(x)}{h} + f'(x) \right| = \left| \frac{f(x-h)-f(x)}{h} + f'(x) \right|$

$$= \frac{1}{|h|} \underbrace{|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|}_{\leq \|f''\|_{\infty,\mathbb{R}} \frac{|h|^2}{2}} \leq \underbrace{\frac{\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}}}{2}|h|}_{\text{indépendant de } x}$$

Donc $\left\| \frac{T(h)-T(0)}{h} + f' \right\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}}}{2}|h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Donc $\boxed{\text{T est dérivable en 0 et } T'(0) = -f'}$