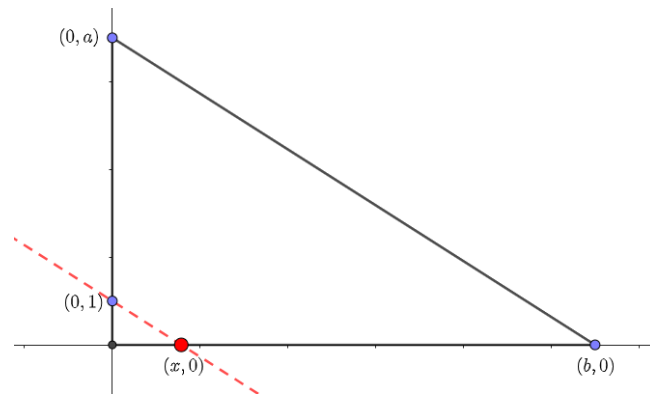


Cyclotomie : solutions des exercices

Exercice 7. Quelques constructions à la règle et au compas

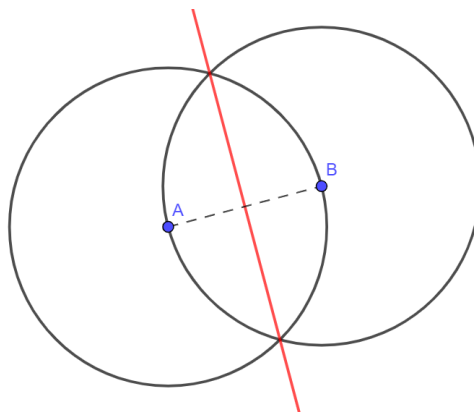
1. Soit A, B deux points du plan. Comment trace-t-on la médiatrice du segment $[AB]$ à la règle et au compas ?
2. Si C est un troisième point, comment trace-t-on la perpendiculaire à (AB) passant par C ?
3. En déduire qu'un nombre complexe $z = x + iy$ est constructible si et seulement si x et y le sont.
4. Comment trace-t-on la parallèle à (AB) passant par C ?
5. Montrer que tout rationnel est constructible. *Indication :*



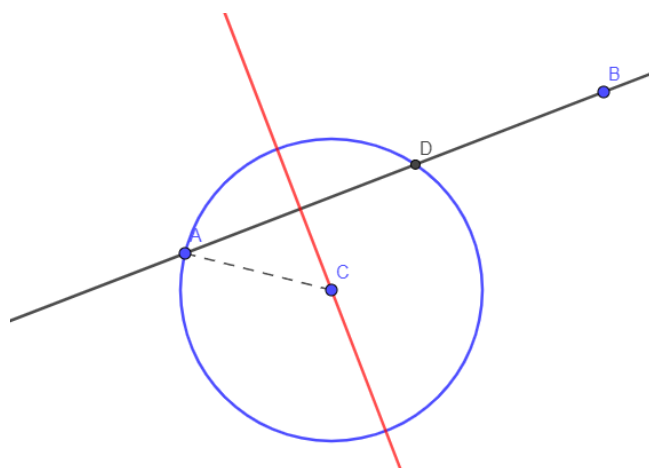
6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ des nombres réels constructibles est un sous-corps de $\mathbf{R}$.
7. Montrer que si x est un réel positif constructible alors $\sqrt{x}$ est constructible.
8. En déduire que $\mathcal{C}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$ stable par racine carrée. *Indication : s'appuyer sur la question 3 et ce qu'on sait du cas réel.*

Solution :

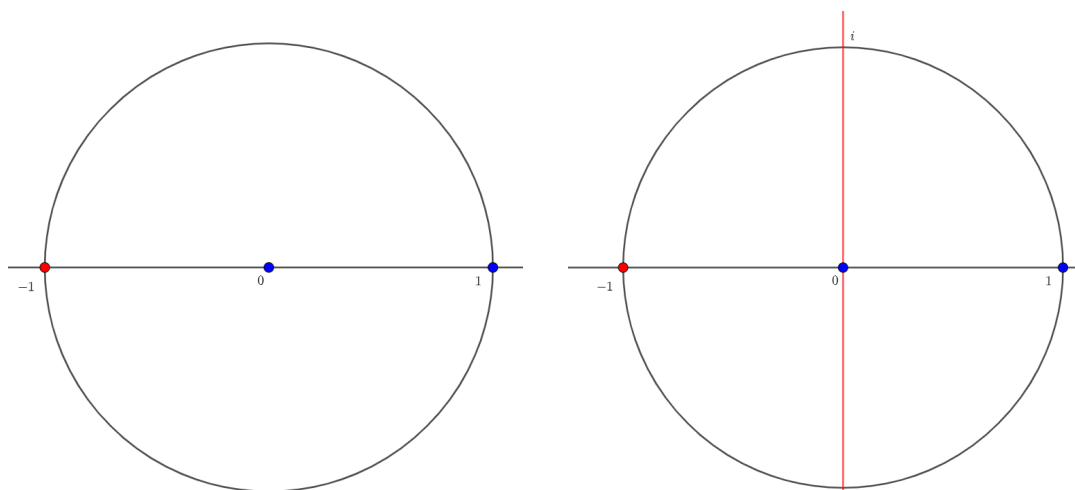
1. On trace le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A , ces cercles se coupent en deux points, et la droite passant par ces deux points est la médiatrice de $[AB]$.



2. On trace le cercle de centre C passant par A . Celui-ci intersecte (AB) en un point D . Si $D = A$, la droite (AB) est tangente au cercle en A , donc (AC) est la perpendiculaire à (AB) passant par C . Si $D \neq A$ alors la médiatrice de $[AD]$ (que l'on sait tracer d'après la question précédente) est la perpendiculaire à (AB) passant par C .

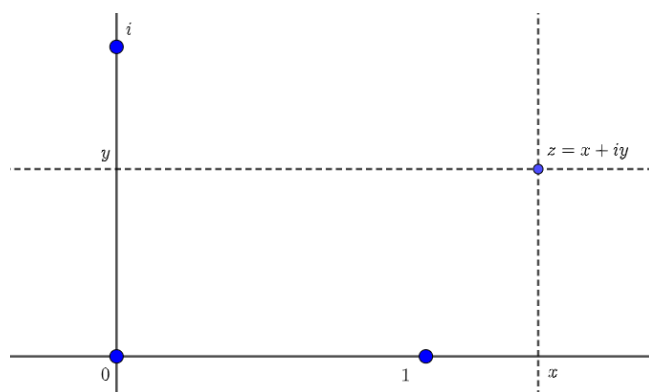


3. En partant de $\{0, 1\}$, on peut d'abord construire le symétrique de 1 par rapport à 0 comme intersection de la droite passant par 0 et 1 et du cercle de centre 0 et passant par 1. Ensuite on sait tracer la médiatrice du segment $[-1, 1]$. On arrive ainsi à construire deux axes orthogonaux.

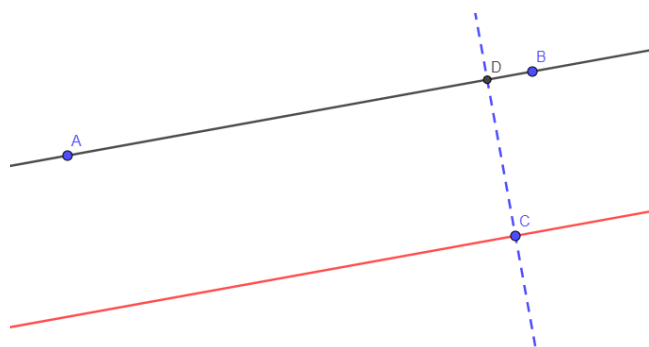


Maintenant, si z est constructible, alors il suffit d'utiliser la question précédente pour tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par z et la perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par z : leurs points d'intersections respectifs avec les axes des abscisses et des ordonnées sont alors les parties réelles et imaginaires de z , qui sont donc constructibles.

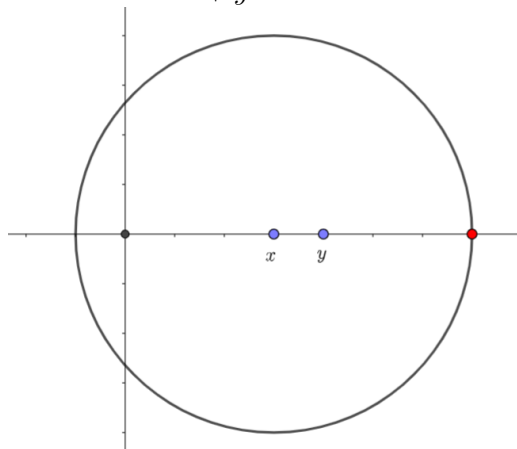
Réciproquement, si x et y sont construits, alors on trace la perpendiculaire à l'axe des ordonnées en y , la perpendiculaire à l'axe des abscisses en x , et le points d'intersection de ces deux perpendiculaires est le points z , qui est donc constructible.



4. Pour construire une parallèle, il suffit de construire deux perpendiculaires successives ! En effet, si l'on veut tracer la parallèle à (AB) passant par C , on trace tout d'abord la perpendiculaire à (AB) passant par C grâce à la question 2. Disons que celle-ci intersecte (AB) en D , alors la perpendiculaire à (DC) passant par C est parallèle à (AB) .



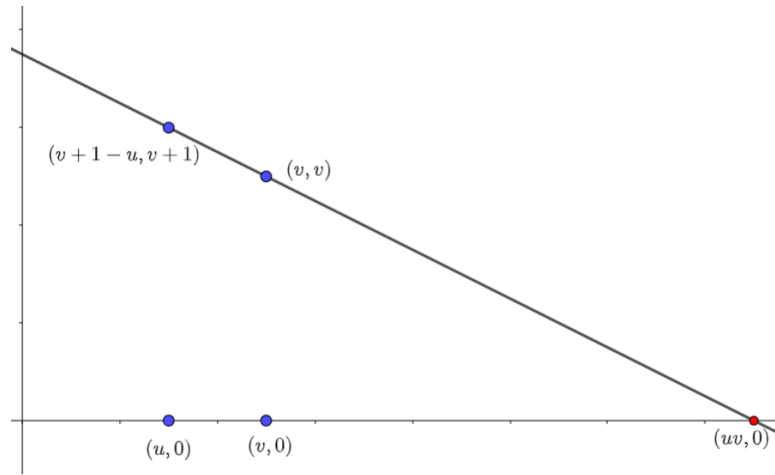
5. Soit $\frac{b}{a} \in \mathbf{Q}$. On peut supposer qu'il est positif, car si l'on sait construire un point x de l'axe réel, on sait construire son symétrique par rapport à 0, et donc $-x$ est aussi constructible. Maintenant, comme a et b sont entiers, on peut construire les points $(0, a)$ et $(b, 0)$ à la règle et au compas, car il suffit de reporter la longueur 1 successivement sur les deux axes orthogonaux que l'on sait construire. Soit d la droite reliant ces deux points. Alors (voir le dessin d'indication) la parallèle à d passant par $(0, 1)$ coupe l'axe des abscisses en un point $(x, 0)$, et grâce au théorème de Thalès on a $x = b/a$. Ainsi, b/a est constructible.
6. Comme on définit la constructibilité à partir de $\{0, 1\}$, ces deux réels sont constructibles. Ensuite, si x est un réel constructible, on construit $-x$ en traçant le cercle centré en 0 et passant par x : il intersecte l'axe des abscisses en $-x$. Il reste à montrer que $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ est stable pour la somme, le produit et le passage à l'inverse.
- Stabilité pour la somme : si x et y sont deux réels constructibles (disons positifs pour simplifier), alors il suffit de reporter la longueur du segment $[O, y]$ avec le compas et de tracer le cercle de centre x et de rayon égal à cette longueur. L'un des points d'intersection de ce cercle avec l'axe des abscisses est $x + y$.



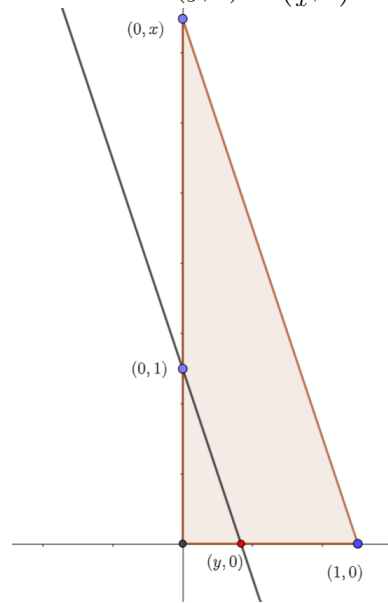
On peut adapter cette construction dans le cas où l'un des deux est négatif. On voit ici que la preuve est simplifiée par le fait qu'on ait autorisé les reports de longueur dans la définition de constructibilité.

- Stabilité pour le produit : si u et v sont deux réels constructibles, alors les points A et B du plan de coordonnées respectives (v, v) et $(v + 1 - u, v + 1)$ sont constructibles (cela vient de la stabilité pour la somme que l'on vient de montrer et de la constructibilité des projections orthogonales cf. question 3). Or la droite passant par ces deux points coupe l'axe des abscisses au point $(uv, 0)$. En effet, si on note C_x le point de coordonnées $(x, 0)$, alors

$$\begin{aligned} C_x \in (AB) &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC_x} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} 1-u & x-v \\ 1 & -v \end{vmatrix} = 0 \iff x = uv. \end{aligned}$$



- Stabilité par passage à l'inverse : si x est un réel constructible non nul, alors on commence par tracer la droite passant par les points $(0, x)$ et $(1, 0)$. La parallèle à cette droite passant par $(0, 1)$ coupe alors l'axe des abscisses en $(y, 0) = (\frac{1}{x}, 0)$ d'après le théorème de Thalès.

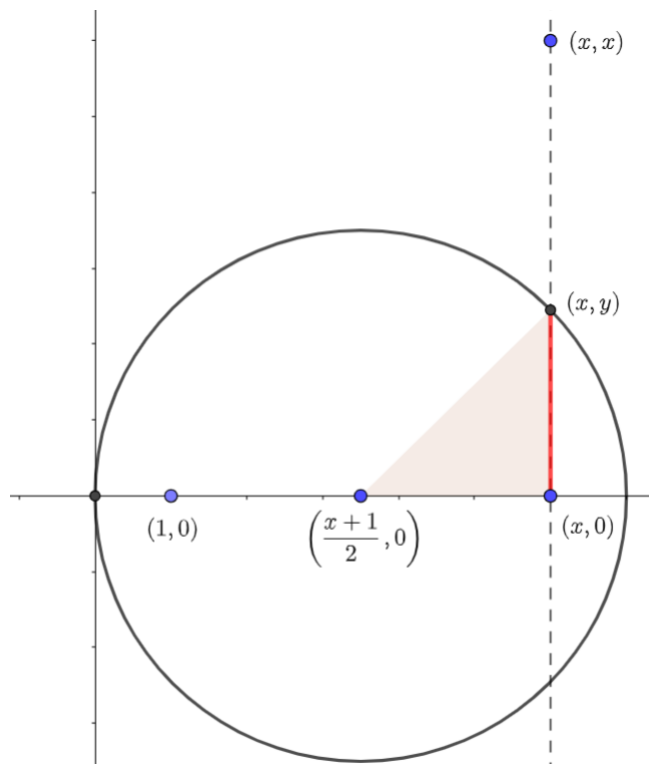


Remarque : Cette question implique le résultat de la question précédente puisqu'un sous-corps de $\mathbf{R}$ contient nécessairement $\mathbf{Q}$.

7. Stabilité par passage à la racine carrée : si x est un réel constructible positif, alors d'après ce qu'on a vu jusqu'ici, les points de coordonnées $(\frac{x+1}{2}, 0)$, $(x, 0)$ et (x, x) sont constructibles. On trace ensuite le cercle de centre $(\frac{x+1}{2}, 0)$ passant par l'origine, et la droite passant par les points $(x, 0)$ et (x, x) . Notons y la hauteur du point d'intersection au-dessus de l'axe des abscisses. Alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle grisé, on a :

$$y^2 + \left(x - \frac{x+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

d'où $y = \sqrt{x}$, ce qui montre la constructibilité de $\sqrt{x}$.



8. Si $x + iy$ et $x' + iy'$ sont constructibles, alors d'après la question 3 leurs parties réelles et imaginaires sont constructibles. Donc c'est aussi le cas de $x + x'$ et $y + y'$ car $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$. D'après la question 3 appliquée dans l'autre sens, on en déduit que le complexe $(x + x') + i(y + y')$ est constructible, mais c'est exactement $(x + iy) + (x' + iy')$. On a donc montré que la somme de deux nombres complexes constructibles est constructible.

L'argument pour la différence, le produit et l'inverse est similaire, il suffit de constater qu'au niveau des parties réelles et imaginaires, on ne fait que des opérations qui ne nous font pas sortir du corps des réels constructibles, puis d'utiliser la question 3.

Pour la stabilité par racine carrée, supposons que $\alpha := a + ib$ est un complexe constructible et montrons que les racines complexes du polynôme $X^2 - \alpha$ sont constructibles. Pour cela, rappelons comment s'obtiennent les formules pour les racines carrées d'un nombre complexe : $z = x + iy$ satisfait $z^2 = \alpha$ si et seulement si

$$\begin{cases} z^2 = \alpha \\ |z|^2 = |\alpha| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ensuite, les deux premières équations permettent de déterminer x et y au signe près, et la relation entre le signe de x et celui de y est donnée par la dernière équation. Ainsi, les racines du polynôme $X^2 - \alpha$ sont de la forme

$$z = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

avec une condition de cohérence des signes dans les « $\pm$ » qui dépend du signe de b . Comme a et b sont constructibles et $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$ stable par racines carrée, on voit que les parties réelles et imaginaires de z sont constructibles, donc z l'est aussi grâce à la question 3.