Feuille 2 bis

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de structure des groupes abéliens finis.

Thm : Si G est un groupe abélien fini, il existe une unique suite d'entiers $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k$ tels que $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_k$

et $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$

1. On rappelle que si G est un groupe abélien fini, on note $\widehat{G}$ son groupe dual, qui est le groupe formé par les caractères, c'est-à-dire les morphismes de groupes de G vers $\mathbb{C}^\times$.

   Montrer que pour tout sous-groupe $H \leq G$, le morphisme de restriction
   $$\begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{H} \\ \chi & \longmapsto & \chi_{|H} \end{array}$$
   est surjectif.

   Indicat° : On pourra raisonner par récurrence sur l'indice de H dans G.

2. Montrer que si G est un groupe abélien fini et $d := \max_{x \in G} o(x)$, alors pour tout $x \in G$, $o(x) \mid d$.

3. Soit $x \in G$ d'ordre maximal. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\Psi : G \longrightarrow \langle x \rangle \times G/\langle x \rangle$

4. En déduire, par récurrence sur $|G|$, la partie "existence" du théorème de structure.

5. Démontrer la partie "unicité"

6. Déduire du théorème de structure une preuve courte du fait suivant :
   "Si K est un corps et G un sous-groupe fini de $K^\times$, alors G est cyclique"