

## Leçon 151 - Dimension d'un espace vectoriel (cas de la dimension finie).

### Rang. Exemples et applications.

Cadre : E est un K-ev.

#### 1. Théorie de la dimension. —

##### 1. Familles génératrices, familles libres, bases. —

- Def : Une famille  $(x_i)_i$  d'éléments de E est libre si la seule combinaison linéaire d'éléments de la famille qui est nulle est la combinaison linéaire  $\lambda_i = 0$ . Elle est génératrice si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des  $(x_i)_i$ . Elle est une base de E si elle est libre et génératrice.
- Pro : Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Ex : Base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$  ni libre ni génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
- Pro : Une famille  $(x_i)_i$  est une base ssi elle est libre maximale pour l'inclusion ssi elle est génératrice minimale pour l'inclusion.

##### 2. Espaces vectoriels de dimension finie. —

- Def : E est dit de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini. On dit qu'il est de dimension infinie sinon. On suppose à partir de maintenant que E est de dimension finie.
- Ex :  $K^n, K_n[X], M_n(K), M_{n,m}(K)$  sont des espaces vectoriels de dimension finie.
- Pro : Si G est une famille génératrice et  $L \subset G$  est libre, alors il existe  $L \subset B \subset G$  telle que B est une base.
- App : Théorème de la base incomplète : Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
- App : De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
- Pro : Si  $\dim(E) = n$ , alors toutes les bases de E sont de cardinal n. Une famille libre/génératrice de E de cardinal n est une base de E.
- Def : Si E possède une base de cardinal n, on note alors  $\dim(E) = n$  la dimension de E comme K-ev.
- Ex : Pour  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^n \text{ tq } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.  
 $\{f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tq } f'(t) = a.f(t) \forall t\}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 1.
- Ex : Pour E, F de dimension finie,  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ .

##### 3. Sous-espaces vectoriels. —

- Pro : Soit F un s-ev de E. Alors F est de dimension finie, et on a  $\dim(F) \leq \dim(E)$ , avec égalité ssi  $F = E$ .
- Formule de Grassman : Soient F, G deux s-ev de E. On a :  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ .

- Def : Pour  $E_i$  des s-ev de E, on dit que E est somme directe des  $E_i$ , notée  $E = \bigoplus_i E_i$ , si 
$$\begin{cases} E_i \cap (E_1 + \dots + E_{i-1} + E_{i+1} + \dots + E_r) = \{0\} \\ E = E_1 + \dots + E_r \end{cases}$$
.
- Def : Pour F un s-ev de E, un s-ev G de E tel que  $E = F \oplus G$  est appelé supplémentaire de F dans G.
- Rem : Pour  $E = \bigoplus_i E_i$ , on a  $\dim(E) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_r)$ .
- Pro : Soient  $B_1, B_2$  des bases de F, G. F et G sont en somme directe ssi  $(B_1, B_2)$  est une base de E.
- Pro : Tout s-ev F de E admet un supplémentaire, et les supplémentaires de F sont tous de même dimension.
- Ex : Un supplémentaire de  $S_n(\mathbb{R})$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  est  $A_n(\mathbb{R})$ .

##### 4. Dimension et applications linéaires. —

- Pro : L'image d'une famille libre/génératrice par une application linéaire injective/surjective reste une famille libre/génératrice.
- Pro : Deux espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils ont même dimension.
- Pro :  $\dim(L(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$ .

#### 2. Rang et applications linéaires. —

##### 1. Définition et théorème du rang. —

- Def : Pour  $f \in L(E, F)$ , on définit  $rg(f) := \dim(Im(f))$ . Pour  $(e_i)_i$  une famille de vecteurs de E, on définit  $rg((e_i)_i) := \dim(Vect((e_i)_i))$ . Pour  $M \in M_{n,m}(K)$ , on définit  $rg(M) := \dim(Vect((c_i)))$ , où  $c_i$  sont les vecteurs colonnes de M dans  $K^n$ .
- Pro : Pour  $g \in L(E, F)$  un isomorphisme, on a  $rg(f \circ g) = rg(f)$  et  $rg((g(e_i))_i) = rg((e_i)_i)$ .
- Pro : Pour B une base de E,  $rg(f) = rg(Mat(f, B))$ .
- App : Si M et M' sont équivalentes, alors  $rg(M) = rg(M')$ .
- Théorème du rang : Pour  $f \in L(E, F)$ ,  $rg(f) + \dim(Ker(f)) = \dim(E)$ .
- App :  $M \in M_n(K)$  est inversible ssi  $rg(M) = n$ .
- Ex : Si p est un projecteur, on a  $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ .
- Dev : Théorème de Brauer : Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique quelconque,  $n \geq 1$ , et  $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$ . Alors  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjuguées si et seulement si leurs matrices de permutation  $T_\sigma, T_{\sigma'}$  sont semblables dans  $Gl_n(\mathbb{K})$ .
- App : En dimension finie,  $f \in End(E)$  est injectif ssi f est surjectif ssi f est bijectif.
- Ex : Pour  $a_0, \dots, a_n \in K$  distincts,  $P \in K_n[X] \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \in K^{n+1}$  est un isomorphisme. Les antécédents de la base canonique de  $K^{n+1}$  sont les polynômes interpolateurs de Lagrange en les  $a_i$ . Ils forment ainsi une base de  $K_n[X]$ .
- Contre-ex :  $P \in K[X] \mapsto P' \in K[X]$  est surjectif non injectif.

##### 2. Caractérisation et calcul effectif du rang. —

- Pro : Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, ainsi que les permutations de lignes/colonnes ne changent pas le rang de M.  
On peut ainsi utiliser le Pivot de Gauss pour réduire M par équivalence à une matrice échelonnée, dont le rang est égal au nombre d'échelons non-nuls.
- Pro : Toute matrice  $M \in M_{n,m}(K)$  de rang r est équivalente à  $J_r$ .
- App :  $rg(A) = rg(A^t)$ . Le rang d'une matrice A est ainsi aussi la dimension du s-ev engendré par ses vecteurs ligne.
- Cor : Deux matrices de  $M_{n,m}(K)$  sont équivalentes ssi elles ont même rang.
- Pro : Le rang d'une matrice M est le plus grand entier  $0 \leq r \leq n$  tel qu'il existe une matrice extraite de taille  $r \times r$  de M qui soit inversible (de déterminant non-nul).
- App : On peut ainsi déterminer  $rg(M)$  en calculant des déterminants de matrices carrées extraites de M.

### 3. Formes linéaires. —

- Def : Une forme linéaire sur E est une application linéaire  $f \in L(E, K)$ .  
On appelle espace dual de E l'espace  $L(E, K)$ , noté  $E'$ .
- Ex : Pour  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable,  $D_x(f)(\cdot)$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Pro :  $\dim(E') = \dim(E)$ .
- Ex :  $M \mapsto Tr(M)$  est une forme linéaire. Son noyau est un hyperplan de dimension  $(n^2 - 1)$ , dont un supplémentaire est  $Vect(E_{1,1})$ .
- Def : Pour  $A \subset E$ , on définit l'orthogonal de A dans  $E'$  par  $A^\perp := \{f \in E' \text{ tq } f(x) = 0 \forall x \in A\}$ .  
Pour  $B \subset E'$ , on définit l'orthogonal de B dans E par  $B^\circ := \{x \in E \text{ tq } f(x) = 0 \forall f \in B\}$ .
- Thm : Soit F un s-ev de E et G un s-ev de  $E'$ . On a :  
 $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$  et  $(F^\perp)^\circ = F$ .  
 $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E')$  et  $(G^\circ)^\perp = G$ .

### 3. Extensions de corps. —

- Def : Une extension de corps de K est la donnée d'un corps L et d'un morphisme  $i : K \rightarrow L$ . On la désigne par  $L/K$ .  
On identifie K à  $i(K)$  afin de considérer K comme un sous-corps de L.
- Def : Pour E un L-ev, on note  $\dim_L(E)$  la dimension de E comme L-ev, et  $\dim_K(E)$  la dimension de E comme K-ev.
- Def : Si L est un K-ev de dimension finie, on dit que l'extension est finie, et on appelle degré de l'extension l'entier  $[L : K] := \dim_K(L)$ .
- Ex : Pour  $P \in K[X]$  irréductible,  $K[X]/(P)$  est une extension finie de K de degré  $\deg(P)$ .
- Théorème de la base télescopique : Pour  $M/L$  et  $L/K$  des extensions de corps, on a :  
 $[M : K] = [M : L].[L : K]$ .
- Cor : Pour  $L/K$  une extension finie. E un L-ev,  $\dim_K(E) = \dim_L(E).[L : K]$

- Ex :  $M_n(\mathbb{C})$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $2n^2$ .  
 $[Q(i, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{9}, \mathbb{Q})] = 30$
- Pro : (Invariance par extension des scalaires) Soit L une extension de corps de K, et  $A \in M_n(K) \subset M_n(L)$ . Alors  $rg_K(A) = rg_L(A)$ .  
Ainsi, le rang d'un système linéaire à coefficients dans K est invariant par passage à une extension de corps de K.
- Dev : Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $n \geq 1$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $C(A) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tq } AM = MA\}$  le commutant de A.  
Alors  $C(A) = \mathbb{K}[A]$  ssi  $\mu_A = \chi_A$ .
- Def : Soit  $L/K$ .  $x \in L$  est dit algébrique sur K ssi il existe  $P \in K[X]$  tel que  $P(x) = 0$ . L est dite algébrique sur K ssi tous ses éléments sont algébriques.
- Thm : Toute extension de corps finie de K est algébrique sur K.

### 4. Dimension finie en analyse et en géométrie. —

- Théorème de Riesz : Soit E un espace vectoriel normé. Les fermés bornés de E sont compacts ssi E est de dimension finie.
- Thm : Soit E un evn de dim finie et F un evn. Alors toute  $f \in L(E, F)$  est continue.
- Pro : Les s-ev de dimension finie d'un evn sont fermés.

#### Références

Grifone : Famille génératrice/libre/base, exemples, sous-famille/sur-famille, conditions pour être une base. Ev de dim finie, exemples, extraction de base d'une famille génératrice, Th de la base incomplète,  $\dim(E)$ , une famille libre/géné de n éléments est une base, dimension de  $E \times F$ , exemples. Dim d'un s-ev, formule de Grassman, def somme directe, propriété, supplémentaire, exemple, propriété. Image d'une famille libre/géné par une appli inj/surj,  $E \simeq F$  ssi ils ont même dim,  $\dim((L(E, F)))$ , exemples. Rang de f, de  $(e_i)_i$ , de M, invariance par composition par un isom, Th du Rang, rang de matrices équivalentes, interpolateurs de Lagrange, inj ssi surj ssi bij en dim finie, contre-ex  $P \mapsto P'$ , exemples. Formes linéaires, dual, orthogonal, dimensions,  $M \mapsto Tr(M)$ .

Gourdon : Rang invariant par opérations élémentaires et permutations. M équiv à une  $J_r$ .  $rg(M) = rg(M^t)$ , équivalentes ssi même rang, pivot de Gauss, rang via le det des matrices extraites, autre méthode de calcul du rang, Cramer.

Perrin : Extensions de corps, degré fini, Th de la base télescopique, élément algébrique, exemple.

FGN (Algèbre 2) : Invariance par extension des scalaires, Dimension du commutant.(Dev)

Sans Ref : Th de Brauer.(Dev)

---

May 31, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes