# Table des matières

# Plan de la leçon

Cette leçon s'intéresse à l'existence ou non de prolongements d'une fonction préservant une certaine régularité (continuité, uniforme continuité, dérivabilité à l'ordre k, solution d'équation différentielle, analyticité).
Les fonctions considérées ici seront en général définies sur une partie de $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^n$, d'un espace métrique, ou d'un espace de Banach, et les cas étudiés portent aussi bien sur l'existence ou non de prolongement de certaines fonctions que sur les propriétés de ceux-ci.
L'une des motivations de cette étude porte sur les informations supplémentaires qu'ils peuvent apporter à la fonction initiale, tout en regardant aussi les cas où le comportement global des prolongements possible peut être construit quasiment indépendamment de la fonction à prolonger.

## 1 Prolongements d'un point de vue topologique

### 1.1 Prlongement par continuité en un point

On se place sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de U $\mathbb{R}^n$. On se donne $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue.

**Proposition 1.** — *Soient (X,d) et (Y,$\widetilde{d}$) des expaces métriques, $U \subset X$ et $c \in U$.*
*Soit $f : U \ \{c\} \to Y$ continue, telle que $\lim_{x \to c, x \neq c}(f(x))$ existe dans Y.*
*Alors f se prolonge continûment à U avec $f(c) = \lim_{x \to c, x \neq c}(f(x))$.*

**Exemple 2.** — *La fonction* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{sin(x)}{x} \end{array}$ *se prolonge continûment en 0 par 1.*
*Cela permet de définir la fonction sinc sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

**Contre-exemple 3.** — $x \in \mathbb{R}^* \mapsto sin(\frac{1}{x^2}) \in \mathbb{R}$ *ne se prolonge pas continûment en 0.*

**Application 4.** — *Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$, de classe $C^1$.*
*Alors $\forall y \in I$, la fonction $x \in I - \{y\} \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathbb{R}^m$ se prolonge continûment en y par $f'(y)$*
*car $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \int_0^1 f'(x + (y-x)t)dt$.*

**Exemple 5.** — *Soit $n, k \geq 0$, I un intervalle contenant 0, et $f \in C^k(I, R^n)$.*
*Alors $x \in I \ \{0\} \mapsto \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}}{x^k}$ se prolonge continûment en 0 par $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.*

**Proposition 6.** — *Soient $a < b$, E un espace de Banach, et $f \in C^1([a, b[, E)$.*
*Si $f'$ est bornée sur $[a, b[$ alors $c = \lim_{x \to b^-}(f(x))$ existe et f se prolonge*
*continûment en b par c.*

**Exemple 7.** — *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact. Alors $x \in ]0, 1] \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\ln(x)u} f(u)du$ est $C^0$ et se prolonge continûment par 0 en 0.*

*Démonstration.* Une intégration par parties donne : $\int_{\mathbb{R}} e^{-i\ln(x)u} f(u)du = 0 - \frac{1}{-i\ln(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\ln(x)u} f'(u)du$.
Donc $|\int_{\mathbb{R}} e^{-i\ln(x)u} f(u)du| \leq \frac{1}{|\ln(x)|} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f'(u)|du \to_{x \to 0^+} 0$ car f' est continue à support compact donc intégrable. □

### 1.2 Prolongement par densité

**Théorème 8.** — *Soient (X,d) et (Y,$\widetilde{d}$) des espaces métriques complets, $F \subset X$ tel que $\overline{F} = X$.*
*Soit $f : F \to Y$ uniformément continue sur F.*
*Alors f admet un unique prolongement $\widetilde{f}$ à X tout entier, et $\widetilde{f}$ est uniformément continue sur X.*

**Application 9.** — *Si E, $\widetilde{E}$ sont des espaces de Banach, F un sous-espace vectoriel dense dans E, et $f : F \mapsto \widetilde{E}$ une application linéaire continue, alors f se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E tout entier, avec $\|\widetilde{f}\|_E = \|f\|_F$.*

**Application 10.** — *Soit E un espace de Banach et $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*
*L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire et continue pour $\|.\|_\infty$ sur l'espace $\xi([a,b],E)$ des fonctions étagées de $[a,b] \to E$.*
*On peut ainsi la prolonger à $R([a,b],E) := \overline{\xi([a,b],E)}^{\|.\|_\infty}$, l'espace des fonctions réglées de $[a,b] \to E$.*
*En particulier, $C^0([a,b],E) \subset R([a,b],E)$.*

**Application 11.** *Lemme de Riemann-Lebesgue—*
*Pour f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier de f, $\widehat{f}$ est continue et tend vers 0 pour $|x| \to \infty$.*

*Démonstration.*

La continuité de $\widehat{f}$ découle du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
On trouve de plus que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, ce qui implique que la transformée de Fourier est continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|0\|_1)$ vers $(C^0(\mathbb{R}), \|f\|_\infty)$.
La dernière propriété est vraie pour les fonctions de classe $C^1$ à support compact par IPP, qui sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$. $C^0_0(\mathbb{R})$ étant un sous-espace fermé de $C^0$, le Théorème 7 permet de conclure. □

**Application 12.** *Théorème de Fourier-Plancherel —*
*Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)dx$ est de carré intégrable et $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*
*La transformée de Fourier se prolonge ainsi à $L^2$ en une isométrie linéaire.*
*Cette isométrie est de plus bijective.*

**Application 13.** *Inégalité de Hardy—*
*Pour $1 \geq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^*_+)$, la fonction $F(f) : x \in R^*_+ \mapsto \frac{1}{x} . \int_0^x f(t)dt$ est bien définie, et $\|F(f)\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.*

Le cadre des fonctions uniformément continues sur des espaces denses s'avère être très intéressant car il permet de définir un prolongement à l'espace tout entier qui est unique et que l'on peut déterminer ou approcher à partir d'évaluations de la fonction principale.

### 1.3 Prolongement de fonctions continues sur des fermés

**Proposition 14.** *Théorème de Tietze—*
*Soit (X,d) un espace métrique, Y un fermé de X, et $g \in C^0(Y,\mathbb{R})$.*
*Alors il existe $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ telle que $f\big|_Y = g$ avec de plus $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ si g est bornée.*

**Application 15.** — *Soit (X,d) un espace métrique, $Y_1, Y_2$ deux fermés de X disjoints, et $f_1, f_2$ des fonctions continues de $Y_1, Y_2$ dans $\mathbb{R}$.*
*Alors il existe $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ telle que $f\big|_{Y_1} = f_1$ et $f\big|_{Y_2} = f_2$.*

Pour $f_1 \equiv 1$ et $f_2 \equiv 0$, la foncion $x \mapsto \frac{d(x,Y_2)}{d(x,Y_1)+d(x,Y_2)}$ convient.
Cependant, ces prolongements ne sont pas uniques même si la fonction g à prolonger est uniformément continue.
Pour l'exemple précédent, $x \mapsto \frac{d(x,Y_2)}{k.d(x,Y_1)+d(x,Y_2)}$ convient aussi, $\forall k \geq 0$.

**Application 16.** *Soit (X,d) un espace métrique.*
*Si* $C^0(X,\mathbb{R}) \subset L^\infty(X,\mathbb{R})$*, alors X est compact.*
*Si* $C^0(X,\mathbb{R}) \subset UC(X,\mathbb{R})$ *et que X est sans point isolé, alors X est compact.*

*Démonstration.* Démonstration du premier point
Si X n'était pas compact, on aurait une suite $(x_n)_n$ n'admettant aucune sous-suite convergente.
Quitte à extraire, on peut supposer $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. L'ensemble $Y := \{x_n, n \geq 0\}$ est alors un fermé, et $g : x \in Y \mapsto n \in \mathbb{R}$si $x = x_n$ est bien définie et est continue car Y n'a pas de point d'accumulation.
Le théorème de Tietze nous assure que g admet un prolongement f continu sur X tout entier, avec f bornée, ce qui est impossible car g est non-bornée.

□

**Remarque 17.** — *Pour E un espace de Banach et* $f \in C^0([a,b],E)$*, f est aussi prolongeable continûment sur* $\mathbb{R}$ *avec la non-unicité de ce prolongement.*
*On peut par exemple choisir un prolongement g tel que* $g \equiv 0$ *sur* $\mathbb{R} - [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ *ou tel que g est (b-a)-périodique.*

A contratio avec le prolongement par densité, prolonger une application continue sur un fermé ne demande qu'un recollement local sur le bord du fermé, et n'a aucune incidence sur les valeurs que peut prendre le prolongement loin du fermé initial.
Certains choix de prolongements comme ceux par périodicité restent toutefois intéressants dans des cadres tels que les séries de Fourier.

# 2 Prolongements d'un point de vue différentiel

## 2.1 Prolongements dérivables

**Proposition 18.** — *Soit E un espace de Banach, $a \leq c \leq b \in \mathbb{R}$, et $f : [a,b] \to E$, continue sur $[a,b]$, de classe $C^1$ sur $[a,b] - \{c\}$.*
*Si $\lim_{x \to c, x \in [a,b]}(f'(x))$ existe, alors f est de classe $C^1$ sur $[a,b]$ tout entier.*

**Application 19.** — *Pour $k \geq 1$ et $f \in C^k([a,b],E)$, pour tout y dans [a,b], $x \mapsto \left| \begin{array}{l} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ f'(y) \text{ si } x = y \end{array} \right.$ est de classe $C^{k-1}$ sur $[a,b]$.*

**Exemple 20.** — *La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge de façon $C^\infty$ à $\mathbb{R}$ tout entier avec $f^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \geq 0$.*

**Application 21.** — *Ainsi, la fonction $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left| \begin{array}{l} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{array} \right.$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
*Et la fonction $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(1+x)\Phi(1-x)$ est alors $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$.*
*Pour $\Psi_n(x) := \Psi(nx)$ avec $n \geq 1$, le support de $\Psi_n$ est ainsi $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.*

**Remarque 22.** — *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. En définissant $g(x) := \frac{1}{n}.\frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(u)du}.\Psi_n(x)$, la convolée de g avec $\chi_F$ est alors une fonction de classe $C^\infty$ qui vaut 1 sur $\{x \in F \text{ tq } d(x, \mathbb{R} - F) \geq \frac{1}{n}\}$ et 0 sur $\{x \in \mathbb{R} - F \text{ tq } d(x,F) \geq \frac{1}{n}\}$.*

**Remarque 23.** — *On peut de même définir une fonction de classe $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^m$ avec $\widetilde{\Psi}(x) := \Psi(\|x\|^2)$ grâce à la parité de $\Psi$.*

**Contre-exemple 24.** — *Soit I un intervalle, $c \in I$, et $k \geq 1$.*
*Si f est de classe $C^{k+1}$ sur $I - \{c\}$, de classe $C^k$ sur I, et admet un $DL_{k+1}$ en c, alors f n'est pas forcément de classe $C^{k+1}$ sur I.*
*Pour $f(x) = \left| \begin{array}{l} x^3 sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$ , f est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
*On a que $f'(x) = \left| \begin{array}{l} 3x^2 sin(\frac{1}{x}) - x cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$ donc f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.*
*De plus, f admet un $DL_2$ en 0 car $f(x) = o(x^2)$, mais $f''$ n'est quand-même pas prolongeable continûment par 0 en 0.*

**Contre-exemple 25.** — *Pour $f(x) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$ , f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'$ se prolonge continûment par 0 en 0 bien que f ne soit pas prolongeable continûment en 0.*

**Théorème 26.** —
*Soit $(a_n)_n$ une suite de réels.*
*Alors il existe $\varphi$ de classe $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = a_n$.*

*Ainsi, toute fonction f de classe $C^\infty$ sur un intervalle fermé F peut être prolongée en une fonction de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Malgré une régularité plus forte, le prolongement de fonctions de classe $C^k$ ou $C^\infty$ sur des fermés est lui-aussi réalisable peu importe l'allure de la fonction, car seul le prolongement de l'évaluation des dérivées k-ièmes au bord du fermé est nécessaire.

## 2.2 Prolongement de solutions d'équations différentielles

**Théorème 27.** *Théorème de Cauchy-Lipschitz—*
*Soit I un intervalle, $n, m \geq 1$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F : I \times U \to R^m$ continue et localement Lipschitz par rapport à la seconde variable.*
*Alors pour $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe une unique solution maximale (f,J) de l'équation différentielle $y'(t) = F(t, y(t))$, où J est un intervalle ouvert de I et $f : J \to U$, telle que $f(t_0) = y_0$.*

Le prolongement des solutions des équations différentielles du théorème de Cauchy-Lipschitz est réalisé grâce au fait que deux solutions d'un même problème de Cauchy coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition, et grâce au Lemme de Zorn qui permet alors de considérer l'ouvert maximal d'existence d'une solution à un problème de Cauchy donné.

**Théorème 28.** *Théorème de sortie de tout compact—*
*Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^m$ continue et localement Lipschitz par rapport à la seconde variable, et (f,J) une solution maximale de l'équation différentielle associée à F.*
*Si $\beta := sup(J)$ est dans I, alors f sort de tout compact de U au voisinage de $\beta$, c'est-à-dire :*
*Pour tout K compact de U, il existe $\varepsilon > 0$ tq $f(t) \notin K$ pour tout $t \in ]\beta - \varepsilon, \beta[$.*
*De plus, si $\alpha := inf(J)$ est dans I, alors f sort de tout compact de U au voisinage de $\alpha$.*

**Exemple 29.** — *Pour $F(t, x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,*
*la solution maximale de $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{y(t)} \\ y(0) = x_0 \end{cases}$ est alors $y(t) = \sqrt{x_0^2 - 2t}$ sur $]-\infty, \frac{x_0^2}{2}[$.*
*Cette solution ne se prolonge pas à $\mathbb{R}$ tout entier et sort bien de tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ pour $t \to \frac{x_0^2}{2}$.*

**Exemple 30.** — *Pour $F(t, x) = sin(x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,*
*les fonctions $y(t) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont solution de $\begin{cases} y'(t) = sin(y(t)) \\ y(0) = 2k\pi \end{cases}$.*
*Ainsi, pour $(f, J)$ une solution maximale et non-constante de $y'(t) = sin(y(t))$, f ne peut pas intersecter les droites $y = 2k\pi$, donc $f(t) \in [f(t_0) + 2\pi, f(t_0) + 2\pi]$, donc f est bornée, donc f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

**Application 31.** — *Supposons que F est de plus définie sur $\mathbb{R} \times U$ et que $F(., x)$ est T-périodique pour un $T > 0$ et pour tout $x \in U$.*
*Soit (f,J) une solution maximale de $y'(t) = F(t, y(t))$ et $y_1 \in J$ tel que $y_1 + T \in J$ et $f(y_1) = f(y_1 + T)$. Alors f est définie sur $\mathbb{R}$ et est T-périodique.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz a de fortes répercussions sur le prolongement de solutions d'une équation différentielle. Ce théorème ainsi que le théorème de sortie de tout compact permettent dans certains cas de caractériser facilement le domaine de définition de l'unique prolongement maximal, tout en donnant certaines informations sur le comportement de ce prolongement.

# 3 Prolongements sur des espaces vectoriels

**Théorème 32.** *Hahn-Banach géométrique—*
*Soit E un espace de Banach de dimension finie. Soit* $p : E \to \mathbb{R}$ *telle que pour tous* $\lambda > 0$ *et* $x, y \in E$*, on a* $p(\lambda.x) = \lambda.p(x)$ *et* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$*.*
*Soit V un sous-espace vectoriel de E, et* $f : V \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire telle que* $f(x) \leq p(x)$ *pour tout* $x \in V$*.*
*Alors il existe une forme linéaire g sur E elle que* $g\big|_V = f$ *et telle que* $g(x) \leq p(x)$ *pour tout* $x \in E$*.*

**Remarque 33.** *— Dans le cas où E est un espace de Hilbert et où* $p(x) = \|x\|$*, la notion d'orthogonal d'un sous-espace vectoriel donne immédiatement le résultat même si la dimension est infinie.*

**Application 34.** *— Le dual E' de E sépare les points : Pour tous* $x, y \in E$ *distincts, il existe* $f \in E'$ *tq* $f(x) \neq f(y)$*.*

**Application 35.** *— Un sous-espace vectoriel F est dense dans E si et seulement si pour toutes* $f \in E'$*,* $f\big|_F \equiv 0$ $\Rightarrow f \equiv 0$*.*

**Application 36.** *— Pour tout* $x \in E$*, il existe* $f \in E'$ *telle que* $\|f\| = \|x\|$ *et* $f(x) = \|x\|^2$*.*
*Ainsi,* $\|x\| = \sup_{g \in E', \|g\| \leq 1}(|g(x)|)$*.*

**Application 37.** *Théorème de Banach-Alaloglu—*
*Soit H un espace de Hilbert. Toute suite bornée* $(x_n)_n$ *admet une extractrice qui est faiblement convergente.*

*Démonstration.*

Pour tout $m \geq 0$, la suite $(< x_m, x_n >)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc admet une suite extraite convergente. Par procédé d'extraction diagonal, on a alors une suite extraite $(y_n)_n$ telle que $(< x_m, y_n >)_n$ est convergente pour tout $m \geq 0$.
Ainsi, pour tout x dans $F := Vect(x_m, m \geq 0)$, $(< x, y_n >)_n$ est convergente par linéarité.
Notons u(x) cette limite. On montre alors que u est linéaire par unicité de la limite, et continue sur F car $|u(x)| \leq \|x\|.sup_n(\|y_n\|) = \|x\|.M$ avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
L'Application 8 nous permet de prolonger u en une forme linéaire continue sur $\overline{F}$, et la Remarque 30 nous permet de prolonger u à H tout entier.
Le théorème de Riesz nous dit alors que $u(x) =< x, a >$ pour un certain $a \in H$, donc la suite des $(y_n)_n$ est bien faiblement convergente vers a. $\square$

# 4 Aspects analytiques

## 4.1 Fonctions analytiques, prolongements analytiques

**Définition 38. —**
Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$).
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique si f est de classe $C^\infty$ sur $\Omega$, et si $\forall x \in \Omega$ f est égale sur un voisinage de x à la somme de sa série de Taylor en x.

**Exemple 39. —**
*Les fonctions polynômiales sont analytiques sur $\mathbb{C}$.*
*La fonction $z \in \mathbb{C} - \{1\} \mapsto \frac{1}{z-1}$ est analytique sur $\mathbb{C} - \{1\}$.*
*Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ de rayon de convergence R est analytique sur son disque de convergence $\mathbb{D}(0,R)$.*
*A contrario, $x \mapsto \left| \begin{array}{l} e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$ n'est pas analytique en 0.*

**Théorème 40.** *Théorème des zéros isolés—*
*Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$), et f analytique sur $\Omega$.*
*Si l'ensemble $\{z \in \Omega \text{ tq } f(z) = 0\}$ a un point d'accumulation dans $\Omega$, alors $f \equiv 0$.*

**Exemple 41.** — *La fonction $z \in \mathbb{D} \mapsto \sum_{n\geq 0} z^n$ se prolonge analytiquement par $\frac{1}{z-1}$ à $\mathbb{C} - \{1\}$.*

**Proposition 42.** *Formule de la valeur moyenne—*
*Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), f analytique sur $\Omega$, et $z_0 \in \Omega$.*
*Alors, pour tout $0 < r < d(z_0, \partial\Omega)$, on a : $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$*

**Proposition 43.** *Prolongement en une singularité levable—*
*Soit $z_0 \in \Omega$ et f analytique sur un voisinage épointé de $z_0$, $V - \{z_0\}$.*
*Si f est bornée sur $V - \{z_0\}$, alors f se prolonge analytiquement en $z_0$.*

**Exemple 44.** — *Soit f analytique sur $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $z_0$ tel que $f(z_0) = 0$.*
*Alors $g : z \in \Omega \mapsto \left| \begin{array}{l} \frac{f(z)}{z-z_0} \text{ si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) \text{ si } z = z_0 \end{array} \right.$ est analytique sur $\Omega$.*

**Application 45.** *Lemme de Schwarz—*
*Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique avec $f(0) = 0$.*
*Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$ avec égalité en un $z_0 \neq 0$ si et seulement si $f(z) = \frac{f(z_0)}{|z_0|}.z$, $\forall z \in \mathbb{D}$.*

**Application 46.** — *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, non bijective, avec un point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$.*
*Alors la suite $f_n := f \circ f \circ \ldots \circ f$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante $\alpha$.*
*Ainsi, f ne possède qu'un seul point fixe dans $\mathbb{D}$.*

*Démonstration.* Quitte à regarder $\Psi_\alpha^{-1} \circ f \circ \Psi_\alpha$ où $\Psi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ qui envoie $\alpha$ sur 0, on peut supposer que $f(0) = 0$. La fonction $g : x \in \mathbb{D} \mapsto \left| \begin{array}{l} \frac{f(z)}{z} \text{ si } z \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } z = 0 \end{array} \right.$ est analytique sur $\mathbb{D}$, et le Lemme de Schwarz nous dit que $|g(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$ car f est non-bijective.
Donc pour un $0 < r < 1$ fixé, $\forall z$ tq $|z| \leq r$, on a $|f(z)| \leq \sup_{|w|\leq r} |g(w)|.|z| = M.|z|$ avec $0 < M < 1$.
Ainsi, $\sup_{|z|\leq r} |f_n(z)| \leq M^n.r \to_{n\to\infty} 0$, donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur tout compact. $\square$

**Application 47.** *Formule des compléments et prolongement de $\Gamma$—*
*La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^t.t^{z-1}dt$ est bien définie et analytique sur $\{z \text{ tq } Re(z) > 0\}$.*
*Pour tout z tel que $0 < Re(z) < 1$, on a : $\Gamma(z).\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi.z)}$.*
*Ainsi, la fonction $g : z \mapsto \frac{\pi}{sin(\pi.z)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-z)}$ définie sur $\{z \text{ tq } Re(z) > 1\} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ est analytique et coïncide avec $\Gamma$ sur $\{z \text{ tq } 0 < Re(z) < 1\}$.*
*Cela permet de prolonger $\Gamma$ analytiquement à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.*

**Proposition 48.** —

*Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f,g analyiques sur $\Omega$.*
*Si il existe $z_0 \in \Omega$ vérifiant $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $\forall n \geq 0$, alors $f \equiv g$ sur $\Omega$.*

Les prolongements analytiques se révèlent être assez forts pour que le domaine de définition d'un prolongement dépende de la fonction initiale et pour que la fonction prolongée soit uniquement déterminée par la fonction initiale.
La suite de cette partie sur les prolongements analytiques porte alors plus sur l'existence de tels prolongements et sur les contraintes que peuvent posséder les ouverts sur lesquels un prolongement peur exister.

### 4.2 Problèmes de prolongements analytiques

**Définition 49.** —

Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f analytique sur $\Omega$.
Un point $z_0 \in \partial\Omega$ est dit régulier pour f s'il existe un ouvert V contenant $\Omega \cap \{z_0\}$ et g analytique sur V telle que $f \equiv g$ sur $\Omega$.
Le point $z_0$ est dit régulier pour f sinon.

**Contre-exemple 50.** — *Pour $f : z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ de rayon de convergence R, il y a au moins un point de $\partial\mathbb{D}(0,R)$ qui est singulier pour f.*

**Exemple 51.** — *Pour $z_1,\dots,z_n \in \partial\mathbb{D}(0,1)$, $f(z) = \Pi_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i}$ et $a_n = f^{(n)}(0)$, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n.z^n$ a $z_1,\dots,z_n$ comme points singuliers.*

**Théorème 52.** *Théorème des Lacunes de Hadamard*—
*Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.*
*Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.*
*Alors, la somme de cette série entière n'a aucun point régulier sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$.*

**Exemple 53.** — *La somme de la série $\sum_{n\geq 0} n.z^{2^n}$ est analytique sur $\mathbb{D}(0,1)$, diverge en tout point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$, et n'admet aucun prolongement analytique. La somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}.z^{2^n}$ est analytique sur $\mathbb{D}(0,1)$, se prolonge continument sur $\partial\mathbb{D}(0,1)$, mais n'admet aucun prolongement analytique.*

**Exemple 54.** — *Pour tous $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ln(x)$ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} - \{z \text{ tq } z = r.e^{i\alpha}, r > 0\}$ par $ln_\alpha(z) = ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|.e^{i\theta}$, $\theta \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$.*
*Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a ainsi un $\alpha$ tel que $ln_\alpha(z)$ soit bien défini et que $ln_\alpha$ prolonge analytiquement ln. Cependant, aucune de ces fonctions ne peut se prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier car $\lim_{\theta\to\alpha^+}(ln_\alpha(r.e^{i\theta})) \neq \lim_{\theta\to\alpha+2\pi^-}(ln_\alpha(r.e^{i\theta}))$, $\forall r > 0$.*

**Remarque 55.** — *Contrairement aux solutions d'un problème de Cauchy d'une équation différentielle, on ne peut pas définir de façon unique un prolongement maximal d'une fonction analytique car cela dépend du choix des prolongements intermédiaires.*
*Pour f analytique sur U et $(f_1, U_1), (f_2, U_2)$ des prolongements analytiques de f, on sait que $f_1 \equiv f_2$ sur la composante connexe de U dans $U_1 \cap U_2$, mais on n'a à priori pas d'informations entre les valeurs de $f_1$ et $f_2$ sur les autres composantes connexes de $U_1 \cap U_2$.*
*Dans le cas où $f_1$ n'admet aucun prolongement analytique et où $U \subset U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2$ possède une unique composante connexe, $(f_1, U_1)$ sera l'unique prolongement maximal de $(f, U)$.*
*Ces propriétés sont par exemple vérifiées pour le prolongement analytique de la fonction $\Gamma$ à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$*

# Développements

## 1 Théorème de Fourier-Plancherel

**Références :** RUBIN Walter ; Analyse réelle et complexe : Cours et exercices ; Théorème 9.13 (p225) ; Broché.

**Théorème. —**
Pour toute fonction f $\in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)dx$ est de carré intégrable et $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
La transformation de Fourier se prolonge ainsi à $L^2$ en une isométrie linéaire.
Cette isométrie est de plus bijective.

*Démonstration.*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Nous allons dans un premier temps montrer que $\|\widetilde{f}\|_2 = \|f\|_2 < \infty$.
Pour se faire, définissons $g := x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y).\overline{f(y-x)}dy =< f, \tau_{-x} f >$ où $\tau_u$ est l'opérateur de translation par u : $\tau_u f(y) = f(y+u)$.
On rappelle que cet opérateur de translation vérifie :
$\forall 1 \leq p < \infty, \forall u \in \mathbb{R}, \tau_u$ est une isométrie linéaire sur $(L^p(\mathbb{R}))$ et la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto \tau_u \in L_C(L^p(\mathbb{R}))$ est continue.

Comme f est dans $L^2(\mathbb{R})$, $\tau_{-x} f$ aussi, donc g(x) est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}$. Comme $u \in \mathbb{R} \mapsto \tau_u \in L_C(L^2(\mathbb{R}))$ et que $< f, . >$ est continue sur $L^2(\mathbb{R})$, g est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, vu que f et $\tau_{-x} f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, l'inégalité de Young appliquée à g pour $p = 1, q = 1$ nous dit que $\|g\|_1 \leq \|f\|_1.\|\tau_{-x} f\|_1 = \|f\|_1.\|f\|_1 < \infty$. Donc $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Pour $\lambda > 0$, définissons en parallèle $H_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|}$.
Montrons que transformée de Fourier $h_\lambda$ de $H_\lambda$ définit une approximation de l'unité. Celle-ci vaut :
$h_\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-\lambda|x|}.dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{x(-iy+\lambda)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{x(-iy-\lambda)} dx = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\lambda - iy} + \frac{1}{\lambda + iy})$
$\Rightarrow h_\lambda(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} . \frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2}$
Donc $h_\lambda \geq 0$ et la fonction est paire.
Soit $a \geq 0$. On a :
$\int_{|x|>a} h_\lambda(x)dx = 2\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{\pi} . \frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{y}{\lambda})^2} \frac{dx}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{a}{\lambda}}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{2}{\pi} [\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{a}{\lambda})]$

Donc $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = 1$ et $\int_{|x|>a} h_\lambda(x)dx \to_{\lambda \to 0} 0$. Ainsi, la famille $(h_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ définit bien une approximation de l'unité.

Comme g est continue bornée et $h_\lambda$ intégrable, le produit de convolution $g * h_\lambda$ est bien défini. Le fait que $(h_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ soit une approximation de l'unité nous dit que $g * h_\lambda(0)$ converge vers $g(0) =< f, \tau_0 f >= \|f\|_2^2$ pour $\lambda \to 0$.
D'autre part, comme g,$H_\lambda$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de Fubini à $g * h_\lambda(0)$ pour avoir :
$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(-x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x). \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} H_\lambda(y) dy dx$
$\Rightarrow g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} g(x) H_\lambda(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) H_\lambda(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y). \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|}.dy$

En notant $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, on peut alors écrire que $g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widetilde{f}(y-x)dx = f * \widetilde{f}(y)$.
Donc $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y) \widehat{\widetilde{f}}(y).\sqrt{2\pi}$. Ce terme $\sqrt{2\pi}$ apparaît de par l'introduction du $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dans la définition de $\widehat{f}$ de l'énoncé.
Et $\widehat{\widetilde{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \overline{f(-x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(-x) dx} = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-iuy} f(u) du} = \overline{\widehat{f}(y)}$.
Donc $\widehat{g}(y) = |\widehat{f}(y)|^2.\sqrt{2\pi}$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\widehat{g}(y)H_\lambda(y) = |\widehat{f}(y)|^2 e^{-\lambda|x|}$ qui converge en croissant vers $|\widehat{f}(y)|^2$ pour $\lambda \to 0$.
Cette convergence est même uniforme sur tout compact car $\inf_{x\in[-N,N]}(e^{-\lambda|x|}) = e^{-\lambda.N}$.

Donc pour tout $N > 0$, $\int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy$ converge en croissant vers $\int_{-N}^{N} |\widehat{f}(y)|^2 dy$ pour $\lambda \to 0$.
Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2 dy = \lim_{N\to\infty} \lim_{\lambda\to 0} \int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy = \lim_{\lambda\to 0} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{g}(y)H_\lambda(y)dy = \lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = \|f\|_2^2$ en utilisant le théorème du double supremum.

La transformée de Fourier de f est donc bien dans $L^2(\mathbb{R})$, donc la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vers $L^2(\mathbb{R})$ est bien définie, est linéaire, et est une isométrie car $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
De plus encore, pour $h \in L^2(\mathbb{R})$, $h\big|_{[-N,N]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et $h\big|_{[-N,N]} \to^{\|.\|_2}_{N\to\infty} h$ , donc $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
Le théorème de prolongement des applications linéaires continues s'applique alors et permet de prolonger la transformation de Fourier en une isométrie linéaire $\mathscr{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vers $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$. Comme $\mathscr{F}$ est une isométrie linéaire, son image est fermée dans $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$ pour conclure.
Soit f dans $\mathscr{F}(L^2(\mathbb{R}))^\perp$.
Pour $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|\alpha - x|}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est $x \mapsto h_\lambda(\alpha - x)$.
On trouve alors que $0 = \int_{\mathbb{R}} f(x).h_\lambda(\alpha - x)dx = f * h_\lambda(\alpha)$, pour tous $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
Comme $(h_\lambda)_\lambda$ est une approximation de l'unité, pour f continue à support compact, on sait que $f * h$ converge uniformément vers f, donc $f * h$ converge vers f pour $\|.\|_2$.
La densité de $C_c^0(\mathbb{R}) dans L^2(\mathbb{R})$ et le fait que $\|(f - g) * h_\lambda\|_2 \leq \|f - g\|_2.\|h_\lambda\|_1$ permettent d'étendre ce résultat à tout $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Ainsi, $f = \lim_{\lambda\to 0}(f * h_\lambda) \equiv 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui permet de conclure que $\mathscr{F}$ est bien une isométrie linéaire bijective sur $L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

## 2 Théorème des lacunes de Hadamard

**Référence :** ZUILY Claude, QUEFFELEC Hervé ; Analyse pour l'agrégation, 4e édition ; Théorème IV.6 (p55) ; Broché.

**Théorème.** Théorème des Lacunes de Hadamard—
Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers non-nuls telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.
Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
Alors, la somme de cette série entière ne se prolonge analytiquement en aucun point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$.

*Démonstration.*

Notons f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$.
Supposons avoir un $\theta$ tel que $e^{i\theta}$ f admette un prolongement analytique sur un voisinage de ce point.
Quitte à remplacer f par $\widetilde{f}(z) := f(e^{-i\theta}z)$ et $a_n$ par $\widetilde{a_n} := a_n.e^{-\lambda_n i\theta}$, $(\widetilde{a_n})_n$, on peut supposer que f admet un prolongement analytique en 1 car $\sum_{n\geq 0} \widetilde{a_n}.z^{\lambda_n}$ est encore une série lacunaire de rayon de convergence 1 et $\widetilde{f}$ est encore la somme d'une série entière lacunaire, et admet un prolongement anlytique sur un voisinage de 1.
On peut donc supposer avoir un voisinage V de 1 et une fonction g analytique sur $\mathbb{D}(0,1)\cup V$ qui prolonge f , c'est-à-dire $g\big|_{\mathbb{D}(0,1)} \equiv f$.

On va chercher à montrer que l'existence de ce prolongement impliquerait que le rayon de convergence de la série lacunaire est $> 1$.
Comme pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, il existe $p \geq 1$ assez grand tel que $1 < \frac{p+1}{p} < \alpha$.
Ainsi, pour tout $n \geq 0$, on a : $p.\lambda_n < (p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1} < (p+1)\lambda_{n+1}$.

Considérons la fonction $\varphi(z) = \frac{z^p+z^{p+1}}{2}$ analytique sur $\mathbb{C}$.
Pour tout z tq $|z| \leq 1$, on a : $|\varphi(z)| = |z^p|.|\frac{1+z}{2}| \leq \frac{|1+z|}{2} \leq \frac{|1|+|z|}{2} \leq 1$.
Si $|z| < 1$ on a donc $|\varphi(z)| < 1$.
Si $|z| < 1$, $|\varphi(z)| = 1$ si on est dans le cas d'égalité stricte de l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire z=a.1 avec $a \in \mathbb{R}_+$.
Donc si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, $|\varphi(z)| < 1$. Et si $z = 1$, $\varphi(z) = 1$.
Ainsi, $p(\overline{\mathbb{D}(0,1)}) \subset \mathbb{D}(0,1) \cup \{1\} \subset \mathbb{D}(0,1) \cup V$.
Comme $\varphi$ est continue, $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,1) \cup V)$ est un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$.
Comme $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$ est compact, sa distance au complémentaire de $\Omega$ est non-nulle, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{D}(0, 1+\varepsilon) \subset \Omega$.
On définit alors $\widetilde{g} : z \in \Omega \mapsto g \circ p(z)$, qui est analytique sur $\Omega$.
Comme $\mathbb{D}(0, 1+\varepsilon) \subset \Omega$, la formule de Cauchy appliquée à $\widetilde{g}$ en 0 pour des cercles de rayon $0 < \rho < 1+\varepsilon$ nous permet de voir que la série de Taylor de $\widetilde{g}$ en 0 a un rayon de convergence $\geq 1+\varepsilon$.

Notons $\sum_{n\geq 0} b_n.z^n$ cette série de Taylor.

Soit $z \in \mathbb{D}(0,1)$. On a $\widetilde{g}(z) = g(\varphi(z)) = f(\varphi(z))$ car $\varphi(z) \in \mathbb{D}(0,1)$.
Or, $f(\varphi(z)) = \sum_{n\geq 0} a_n(p(z))^{\lambda_n} = \sum_{n\geq 0} a_n(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$.
Et pour tout $n \geq 0$, $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\binom{\lambda_n}{k}}{2^{\lambda_n}}.z^{(p+1)k}.z^{p(\lambda_n-k)} = \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\binom{\lambda_n}{k}}{2^{\lambda_n}}.z^{p\lambda_n+k}$.
Ainsi, $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$ est une combinaison linéaire de $z^{p\lambda_n+k}$, avec $0 \leq k \leq \lambda_n$, donc une combinaison linéaire de $z^{p\lambda_n}, z^{p\lambda_n+1}, \ldots, z^{(p+1)\lambda_n}$.
Or, le choix de p entraîne $p.\lambda_n < (p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1} < (p+1)\lambda_{n+1}$, donc les développements des $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$ sont tous des combinaisons linéaires finies de puissances de z différentes.

Et comme $\widetilde{g}(z) = f(\varphi(z))$ sur $\mathbb{D}(0,1)$, on trouve alors que $b_n = \left| \begin{array}{l} a_m.\frac{\binom{\lambda_m}{k}}{2^{\lambda_m}} \text{ si } b = \lambda_m + k,\ 0 \leq k \leq \lambda_m \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$

Pour conclure, prenons $z = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. On a $|z| = z$
Comme $|z| < 1 + \varepsilon$, la série $\sum_{k \geq 0} b_k.z^k$ est alors normalement convergente.
Donc la suite $(\sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_n} |b_k|.z^k)_n$ est convergente.
Or, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_n} |b_k|.z^k = \sum_{l=0}^{n} |a_l|.(\frac{z^p + z^{p+1}}{2})^{\lambda_l}$ au vu des calculs précédents.
Or, $|\varphi(z)| = \varphi(1+\frac{\varepsilon}{2}) > 1$, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n.\varphi(z)^{\lambda_n}$ diverge grossièrement, donc la suite $(\sum_{l=0}^{n} |a_l|.\varphi(z)^{\lambda_l})_n$ diverge vers $+\infty$.
On aboutit ainsi à une contradiction, qui prouve que la fonction f considérée ne se prolonge pas analytiquement en 1, donc que toute somme d'une série lacunaire comme donnée dans l'énoncé n'admet pas de prolongement analytique en aucun point du bord de son disque de convergence.

$\square$

# Questions

• Soit $u \in \mathbb{R}$ et $\tau_u$ l'opérateur de translation. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $u \in \mathbb{R} \mapsto \tau_u f \in L^p(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\|.\|_p$.

*Démonstration.* Soit $1 \geq p < +\infty$. Comme $\tau_{u+v} = \tau_u \circ \tau_v$, montrer que la fonction $u \mapsto \tau_u f$ est continue sur $\mathbb{R}$ revient à montrer qu'elle est continue en 0.
On va d'abord établir le résultat pour f continue à support compact.
Dans ce cas-ci, comme f est continue sur le compact supp(f), et qu'elle vaut 0 sur $\mathbb{R} - supp(f)$, le théorème de Heine nous assure que f est uniformément continue sur $supp(f)$, donc sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a donc $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Quitte à diminuer $\alpha$, supposons $\alpha \leq 1$
Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| < \alpha$ et $N > 0$ tel que $supp(f) \subset [-N, N]$. On a :
$\int_{\mathbb{R}} |f(x+u)-f(x)|^p dx = \int_{-N-1}^{N+1} |f(x+u)-f(x)|^p dx \leq (2N+2).sup_{\mathbb{R}}(|f(x+u)-f(x)|)^p \leq (2N+2).(\varepsilon^{\frac{1}{p}})^p = (2N+2).\varepsilon$. Donc $u \mapsto \tau_u f$ est bien continue en 0, donc bien continue sur $\mathbb{R}$.

Reprenons maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$ quelconque.
Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c^0(\mathbb{R})$, on a g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.
Soit $\alpha > 0$ le module de continuité de $u \mapsto \tau_u g$ en 0, et $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| < \alpha$.
On obtient alors :
$\|\tau_u f - f\|_p \leq \|\tau_u f - \tau_u g\|_p + \|\tau_u g - g\|_p + \|g - f\|_p = \|g - f\|_p + \|\tau_u g - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\varepsilon$, ce qui conclut.

Pour $p = +\infty$, l'adhérence de l'ensemble fonctions continues à support compact pour $\|.\|_\infty$ est seulement l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 en $\pm\infty$, donc un argument de densité ne permet pas de conclure pour l'espace tout entier.
Avec la norme $\|.\|_\infty$, on peut remarquer que pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $u \mapsto \tau_u f$ est continu en 0 si et seulement si f est uniformément continue.

□

• Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{sin(x)-x}{x}$ est prolongeable en 0 et que son prolongement est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

*Démonstration.* Pour $x \neq 0$, $\frac{sin(x)-x}{x} = \frac{sin(x)-sin(0)}{x-0} - 1 = \int_0^1 cos(xt)dt - 1 = \int_0^1 cos(xt) - 1dt$.
Or, la fonction $x \mapsto cos(xt) - 1$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in ]0, 1[$, et $\forall k \geq 0$ sa dérivée k-ième est bornée uniformément en x par $t^k$, qui est intégrable sur $]0, 1[$.
Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres peut ainsi être appliqué de façon itérée pour montrer que $x \mapsto \int_0^1 cos(xt) - 1dt$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Comme cette fonction coïncide avec $\frac{sin(x)-x}{x}$ sur $\mathbb{R} - \{x\}$, on a le prolongement désiré.

□

# Références


[1] POMMELLET Alain. *Cours d'analyse*. Broché, 1998.

[2] MAILLOT Vincent CHAMBERT-LOIR Antoine, FERMINGIER Stéphane. *Exercices de maths pour l'agrégation. Analyse 1, 2e édition*. Broché, 1997.

[3] FARAUT Jacques. *Calcul Intégral*. Broché, 2006.

[4] ROMBALDI Jean-Etienne. *Eléments d'analyse réelle*. Broché, 2004.

[5] DEMAILLY Jean-Pierre. *Analyse numérique et équations différentielles*. Broché, 2006.

[6] RUDIN Walter. *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices*. Broché, 1998.

[7] GOURDON Xavier. *Les maths en tête : Analyse*. Broché, 2008.

[8] QUEFFELEC Hervé ZUILY Claude. *Analyse pour l'agrégation, 4e édition*. Broché, 2013.