

I) Prolongements d'un point de vue topologique

1) Prolongement par continuité en un point

Prop. 1: Soient (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ des espaces métriques, $U \subset X$ un ensemble, et $c \in U$. Soit $f: U \setminus \{c\} \rightarrow Y$ continue, et telle que $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))$ existe dans Y .

Alors f se prolonge continûment à U avec $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x))$.

Ex 2: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge continûment en 0 par 1.
Cela permet de définir la fonction sine.

Contre-ex 3: $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$ ne se prolonge pas continûment en 0.

Appli 4: Soit $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, de classe C^1 .

Alors, $\forall y \in \mathbb{I}$, $x \in \mathbb{I} \setminus \{y\} \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \mathbb{R}^m$ se prolonge continûment en y par $f'(y)$ car $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \int_0^1 f'(y + (x - y)t) dt$.

Prop 5: Soient $a < b \in \mathbb{R}$, E un Banach, et $f \in C^1([a, b]; E)$.

Si f est bornée sur $[a, b]$, alors f se prolonge continûment en b .

Ex 6: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Alors $x \in]0, 1[\mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(u) du$ est C^1 et se prolonge continûment par 0 en 0.

2) Prolongement par densité

Théorème 7: Soient (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ des esp. métriques complets, et $F \subset X$ tq $\bar{F} = X$.

Soit $f: F \rightarrow Y$ uniformément continue sur F .
Alors f admet un unique prolongement $\tilde{f}$ à X tout entier, et $\tilde{f}$ est unif. continue.

Application 8: Si $E, \tilde{E}$ sont des esp. de Banach, F s.-a. dense dans E , et $f: F \rightarrow \tilde{E}$ linéaire continue, alors f se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{f}$ sur E tout entier, et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Application 9: Soit E un Banach et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire, continue sur l'espace des fct étagées de $[a, b]$ vers E pour $\|\cdot\|_\infty$.

On peut ainsi la prolonger à $R([a, b]; E) = \overline{E([a, b]; E)}^{\|\cdot\|_\infty}$ l'espace des fonctions réglées de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On a que $C^0([a, b]; E) \subset R([a, b]; E)$.

Application 10: (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$: $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ si $|\xi| \rightarrow \infty$.

Application 11: (Théorème de Fourier-Plancherel) [DEV1]

$\forall f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

La transformée de Fourier se prolonge à L^2 en une isométrie $L^2 \rightarrow L^2$.

Application 12: (Inégalité de Hardy)

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, $1 \leq p < +\infty$, $F: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ est bien définie, et $\|Ff\|_{p,1} \leq \frac{1}{p-1} \|f\|_{p,1}$.

3) Prolongement de fonctions continues sur des fermés

Prop. 13: (Théorème de Tietze)

Soit (X, d) métrique, Y un fermé de $\mathbb{R}$, et $g \in C(Y; \mathbb{R})$.

Alors $\exists f \in C(X; \mathbb{R})$ tq $f|_Y = g$, avec $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ si g est bornée.

Appli 14:

Soit (X, d) métrique, Y_1, Y_2 fermés disjoints de X .

Alors $\exists f \in C(X; \mathbb{R})$ tq $f|_{Y_1} \equiv 0$ et $f|_{Y_2} \equiv 1$.

Appli 15:

Soit (X, d) métrique.

- Si $C(X; \mathbb{R}) \subset C^0(X; \mathbb{R})$, alors X est compact.

- Si $C(X; \mathbb{R}) \subset UC(X; \mathbb{R})$ et que X est sans point isolé, alors X est compact.

Ex 16: Pour $f \in C([a, b]; E)$, E Banach, on peut prolonger continûment f sur $\mathbb{R}$ de diverses façons, comme $\tilde{f} \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ ou $\tilde{f}$ $(b-a)$ -périodique sur $\mathbb{R}$.

[POM]

[RUD]
[FAR]

[CHA]

[QZ]

[RDM]

[POM]

IV) Prolongement d'un point de vue différentiel

1) Prolongement dérivable

Prop 17: Soit $f: [a; b] \rightarrow E$, E un Banach, de classe C^1 sur $[a; b] \setminus \{c\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow c} (f'(x))$ existe, alors f est de classe C^1 sur $[a; b]$ tout entier.
 $x \in [a; b]$

Appli 18: Pour $f \in C^k([a; b]; E)$, $\forall y \in [a; b]$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ est de classe C^{k-1} sur $[a; b]$.

Ex 19: $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge de façon C^∞ à $\mathbb{R}$ tout entier avec $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \geq 0$.

Appli 20: Ainsi, $x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Et $x \mapsto \psi(1+x) \psi(1-x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$



Contre-ex 21: Si f est de classe C^{k+1} sur $I \setminus \{c\}$, de classe C^k sur I , et admet un DL_{k+1} en c , f n'est pas forcément de classe C^{k+1} sur I .

Pour $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ car $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f admet un DL₂ en 0 car $f(x) = o(x^2)$, mais f' n'est pas prolongeable en 0.

Contre-ex 22: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et f' se prolonge par 0 en 0,

bien que f ne soit pas prolongeable continûment en 0.



2) Prolongement de solutions d'équations différentielles

Théorème 23: (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitz par rapport à la 2^e variable.

Alors il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t; y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ pour } (t_0, y_0) \in I \times U \text{ inclus dans } I.$$

qui est définie sur un intervalle ouvert

Théorème 24: (Sortie de tout compact)

Soit $F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C est localement lipschitz par rapport à la 2^e variable, et $y: J \subset I \rightarrow U$ une solution maximale de l'équa diff associée à F .

Si $\beta = \sup(J) \in I$, alors y sort de tout compact de U au voisinage de β :

$\forall K \subset U$ compact, $\exists \varepsilon > 0$ tq $y(t) \in K \forall t \in]\beta - \varepsilon; \beta[$. (idem pour $\alpha = \inf(J)$)

Ex 25: $F(t; x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour $x' = \frac{1}{x}$, on trouve $x(t) = \sqrt{t_0^2 - 2t}$ sur $]t_0; \frac{t_0^2}{2}]$. Cette solution ne se prolonge pas à $\mathbb{R}$ tout entier et sort de tout compact de $\mathbb{R}^*$ pour $t \rightarrow \frac{t_0^2}{2}$.

Ex 26: $F(t; x) = \sin(x)$, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$x(t) = 2t\pi$ est solution de $x'(t) = \sin(x(t))$. Ainsi, pour y sol non constante de $y'(t) = \sin(y(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 2t\pi$

$y(t) \in [y(0); 2\pi; y(0) + 2\pi]$, donc y est bornée, donc y est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Appli 27: Si F est définie sur $\mathbb{R} \times U$ avec $T > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in U, F(t+T; x) = F(t; x)$ et que l'on a une solution maximale de l'équa diff. sur un intervalle de définition J , est de longueur $> T$, et qu'il existe $y_1 \in J$ tq $y_1 + T \in J$ et $f(y_1) = f(y_1 + T)$, alors f est T -périodique.

III) Prolongements sur des espaces vectoriels

Théorème 29: (Hahn-Banach analytique)

Soit E un Banach de dim finie, $\forall x \in E$, et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ forme lin cont.

Alors il existe $\tilde{f}: E \rightarrow \mathbb{R}$ lin cont tq $\tilde{f}|_V = f$ et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Rem 30: Si E est un espace de Hilbert, la notion d'orthogonal d'un s-vr donne ce résultat sans avoir besoin de dimension finie.

Appli 31: Le dual de E, E' sépare les points: $\forall x, y \in E, x \neq y, \exists f \in E'$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Appli 32: Un s-vr F est dense dans E si $\forall f \in E', f|_F = 0 \Rightarrow f = 0$.

Appli 33: $\forall x \in E, \exists f \in E'$ tq $\|f\| = \|x\|$ et $f(x) = \|x\|^2$. Ainsi, $\|x\| = \sup_{\|g\| \leq 1, g \in E'} |g(x)|$.

Appli 34: (Théorème de Banach-Alaoglu)

Soit H un Hilbert. Toute suite bornée $(x_n)_n$ admet une extraite qui est faiblement convergente.

[POM]

[ROU]

[BRE]

[DEM]

Aspects analytiques

1) Fonctions analytiques, prolongements analytiques

Def 35: Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou intervalle de $\mathbb{R}$).

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique si f est de classe C^∞ sur Ω et si $\forall x \in \Omega$, f est égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de x .

Ex 35: $g: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \frac{1}{1-z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est analytique sur $D(0, R)$, où R est le rayon de convergence de la série.

Théorème 37: (Goursat) Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et f analytique sur Ω . Si l'ensemble $\{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ a un point d'accumulation dans Ω , alors $f \equiv 0$.

Ex 38: $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge analytiquement par $\frac{1}{1-z}$ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Prop 39: (Formule de la valeur moyenne) Soit Ω ouvert connexe, f analytique sur Ω , et $z_0 \in \Omega$. Alors, $\forall \sigma < d(z_0, \partial\Omega)$, on a: $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, \sigma)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

Prop 40: (Prolongement en une singularité levable)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f analytique sur un voisinage épointé de z_0 , $\forall \epsilon > 0$.

Si f est bornée sur $V_\epsilon(z_0)$, alors f se prolonge analytiquement en z_0 .

Ex 41: Soit f analytique sur Ω , ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Soit z_0 et $f(z_0) = 0$. Alors $g: z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ si $z \neq z_0$ est analytique sur Ω . $f'(z_0)$ si $z = z_0$.

Appli 42: (Lemme de Schwarz)

Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analytique, avec $f(0) = 0$. Alors $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$, avec égalité en un z_0 .

Appli 43: (Formule des compléments et prolongement de Γ) si $f(z) = e^{i\theta} z$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

$\Gamma: z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est bien déf et analytique sur $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

$\forall z$ et $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, on a: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Montrer la formule sur $[0, 1]$ est nécessaire et suffisant.

Ainsi, $g: z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \times \frac{1}{\Gamma(1-z)}$ définie sur $\{z \mid \operatorname{Re}(z) < 1\} \setminus \mathbb{N}$ est analytique et coïncide avec Γ sur $\{z \mid \operatorname{Re}(z) < 1\}$. Cela permet de prolonger analytiquement Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Prop 44: Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g analytiques sur Ω , et $z_0 \in \Omega$.

vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$. Alors $f = g$ sur Ω . Ainsi, $g \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ n'est pas analytique.

2) Problèmes de prolongement analytique

Def 45: Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f analytique sur Ω .

Un point $z_0 \in \partial\Omega$ est dit régulier pour f si il existe V ouvert contenant $\Omega \cup \{z_0\}$ et g analytique sur V et $f = g$ sur Ω . z_0 est dit singulier sinon.

Ex 46: Soit $g: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analytique sur $D(0, R)$, où R est le rayon de $\mathbb{C}V$ de la série entière, il y a au moins un point du disque de convergence qui est singulier.

Ex 47: Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}(0, 1)$, $f(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z/z_i}$, $a_n = f^{(n)}(0)$, $g: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $z_1, \dots, z_n$ comme points singuliers.

Prop 48 (lacunes de Hadamard) [DEV 2]

Soit $(n_k)_{k \geq 0}$ suite croissante d'entiers et $\exists \alpha > 1$ et $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \alpha > 1 \forall k \geq 0$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence 1.

Alors, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ n'a aucun point régulier sur $\partial D(0, 1)$.

Ex 49: $g: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2^n}$ est analytique sur $\mathbb{D}(0, 1)$, se prolonge continuellement sur $\partial \mathbb{D}$, mais n'admet aucun prolongement analytique.

Ex 50: $\forall \alpha \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha < 1$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$ peut être prolongée à $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [\pi, \pi + 2\pi]\}$ par $\ln(z) = \ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in]\pi, \pi + 2\pi]$.

Aucune de ces fonctions ne peut se prolonger analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier.

Soit $\Omega = \{z \mid z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [\pi, \pi + 2\pi]\}$, $\ln|z|$ est analytique sur Ω et se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} \setminus [0, i\infty[$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}; -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, mais n'admet pas de prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier.



AGNIEL Vidal

BERAUD Virien

- Rombaldi; Elements d'analyse réelle [ROM]
Pommellet; Cours d'analyse [POM]
Zuily, Queffelec; Analyse pour l'agrégation [ZQ]
Demailly; Analyse numérique et équations différentielles [DEM]
Chambert-Loir, Fermigier, Maillot; Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Analyse 1 [CHA]
Rudin; Analyse réelle et complexe [RUD]
Faraut; Calcul intégral [FAR]
Gourdon; Les maths en tête - Analyse [GOU]