5 Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré

Le demi plan de Poincaré est l'ensemble

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathcal{H}$ de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Ceci appartient bien à $\mathcal{H}$ car pour tout $z \in \mathcal{H}$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = (ad-bc)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0,$$

et on vérifie directement que c'est une action de groupes.

On note

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathcal{H}, |\operatorname{Re} z| \le 1/2, |z| \ge 1\}$$

(dessiner $\mathcal{D}$) et

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Le but de ce développement est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit G le sous groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Alors :*

(a) L'orbite de tout élément de $\mathcal{H}$ par G rencontre $\mathcal{D}$.

(b) Si $z \in \mathring{\mathcal{D}}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\gamma z \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\gamma = \pm I_2$.

(c) $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{H}$. Pour tous $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$, $\operatorname{Im}(cz+d) = c \operatorname{Im} z$ donc l'ensemble des (c,d) tels que $|cz+d| \le 1$ n'a qu'un nombre fini de c possibles et est donc fini en regardant la partie réelle. En conséquence, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $\operatorname{Im}(\gamma z)$ supérieures à $\operatorname{Im} z$ pour γ parcourant G, et la borne supérieure de ces valeurs est donc atteinte pour un certain $\gamma \in G$. Quitte à composer γ par une puissance de T (c'est à dire à translater $\gamma \cdot z$ par un entier relatif), on peut supposer que $z' = \gamma \cdot z$ vérifie $|\operatorname{Re}(z')| \le 1/2$. Ensuite, comme $\operatorname{Im}(S \cdot z') = \operatorname{Im}(z')/|z'|^2$, par hypothèse de maximalité de $\operatorname{Im}(z')$ dans l'orbite, on a $|z'| \ge 1$ donc $z' \in \mathcal{D}$, ce qui prouve le (a).

$c = 0, 1, -1$ car $\frac{3}{4} < 1 - d^2 \le 1$

Comme $\pm I_2$ agit trivialement sur $\mathcal{H}$, on a seulement à prouver le sens direct. Soit $z \in \mathcal{D}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tels que $z' = \gamma z \in \mathcal{D}$. $c^2 + 2cxd + d^2 - 1 \le 0 \Rightarrow \Delta = 4[1 - d^2(1 - x^2)] \ge 0$

et $|c| \le \frac{\sqrt{\Delta} + 2xd}{2} \le \frac{2+1}{2}$

Si $\operatorname{Im}(\gamma z) \ge \operatorname{Im}(z)$, on a alors $|cz + d| \le 1 \Rightarrow$ ~~donc $|c| \le 2/\sqrt{3}$, c'est-à-dire que $c = -1, 0$ ou 1.~~

Donc $c = \pm 1, 0$.

Si $c = 0$, $\gamma = \pm T^n$ pour un certain n et on a $n = \pm 1$ (auquel cas $|\operatorname{Re} z| = 1/2$) ou $n = 0$ soit $\gamma = \pm I_2$. Sinon, quitte à multiplier γ par $-I_2$, on peut supposer que $c = 1$, et alors $|z + d| \le 1$ donc $d = 0$. Ainsi, $\gamma = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $z' = a - 1/z$ et $z' = a - \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $|\operatorname{Re}()| < \frac{1}{2}$

car $|\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{2}$

Si $\operatorname{Im}(\gamma z) \le \operatorname{Im}(z)$, on applique le raisonnement précédent à $\gamma \cdot z$ avec γ^{-1} pour obtenir le même résultat, à savoir que $\gamma = \pm I_2$ ou $z \in \mathring{\mathcal{D}}$, ce qui prouve le (b).

Donc $|\operatorname{Re}(z')| < \frac{1}{2}$ si $a = 0$

Enfin, fixons $z \in \mathring{\mathcal{D}}$ et soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Il existe $\gamma' \in G$ tel que $\gamma'\gamma z \in \mathcal{D}$ d'après le (a), mais alors $\gamma'\gamma = \pm I_2$ d'après le (b) or $\pm I_2 \in G$ donc $\gamma \in G$, c'est à dire que $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. □

Donc $|z'| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z| = 1$ contradiction

Remarque. Il y a encore bien des choses à dire sur l'action de ce groupe : par exemple, que l'action est fidèle une fois quotientée par $\pm I_2$, transitive pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou encore que le quotient pour cette action s'identifie à l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ à homothétie près. Ne pas hésiter à rajouter l'une ou l'autre de ces propriétés si le développement parait un peu court.

Référence : [Alessandri]

Leçons compatibles :

101 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications

108 Exemples de parties génératrices d'un groupes. Applications.

182 Application des nombres complexes à la géométrie. Homographies

~~6 Théorème de Pascal via les coordonnées barycentriques~~

Prérequis :

Coordonnées barycentriques et équations de droites et de coniques dans celles ci

Théorème (Pascal). *Soient six points distincts du plan A, B, C, A', B', C' dont trois quelconques ne sont jamais alignés et ne formant pas de droites parallèles entre elles. Alors, une conique non dégénérée passe par ces six points si et seulement si les points d'intersection (dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) m de (BC') et $(B'C)$, n de (AC') et $(A'C)$ et p de (AB') et $(A'B)$ sont alignés.*

On se place dans les coordonnées barycentriques associées au repère (A, B, C).

Lemme. *La droite passant par deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ distincts a pour équation, en coordonnées barycentriques :*

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Soit $P = (X,Y,Z)$ un point. Comme ce sont des coordonnées barycentriques, on les normalise à somme 1 (ce qui ne modifie passe l'annulation de la matrice ci dessus). Alors, $P \in (MM')$ si et seulement si $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MM'}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, c'est à dire que

$$\begin{cases} X - x &= t(x'-x) \\ Y - y &= t(y'-y) \\ Z - z &= t(z'-z) \end{cases}$$

Comme on a normalisé les coordonnées barycentriques, la dernière ligne est la somme des deux autres, et donc il suffit que t vérifie le système des deux premières lignes, c'est à dire que

$$0 = \begin{vmatrix} X-x & x'-x \\ Y-y & y'-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-x & x'-x & x \\ Y-y & y'-y & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x' & x \\ Y & y' & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x' & x \\ Y & y' & y \\ Z & z' & z \end{vmatrix}$$

□

Posons maintenant $A'(a,a',a'')$, $B'(b,b',b'')$ et $C'(c,c',c'')$. Comme il n'y a aucun alignement entre les six points, ces neufs coordonnées sont non nulles. Ensuite, d'après le lemme précédent,

$$(X,Y,Z) \in (BC') \cap (C'B) \iff 0 = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & 1 \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} \iff \begin{cases} c''X &= cZ \\ b'X &= bY \end{cases}$$

c'est à dire que m a pour coordonnées barycentriques $(bc, b'c, bc'')$.

De même, n a pour coordonnées barycentriques $(c'a, c'a', c''a')$ et p a pour coordonnées barycentriques $(ab'', a''b', a''b'')$. Dans le cas où la somme des coordonnées est nulle, elle définit un