Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo

Soit $d \geq 1$ et $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable par μ_d. Soit $I = \int_{[0,1]^d} f(x)\, d\mu_d(x)$.

Soient $(X_{n,1})_n, \dots, (X_{n,d})_n$ d suites de v.a. réelles iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Soit $Y_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,d})$. C'est une v.a. sur $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{U}([0,1]^d)$ par iid des $X_{n,i}$.

Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k)$.

Alors $S_n \underset{\mu_d\text{-p.s.}}{\longrightarrow} I$.

Et si $\|f\|_\infty < +\infty$, alors $\forall \varepsilon \in \left[0 ; \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty^2}\right]$, $\mathbb{P}(|S_n - I| \geq \varepsilon \|f\|_\infty) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{4} \times \frac{\|f\|_\infty^2}{\|f\|_2^2}\right)$.

démo :

1) On a $E[f(Y_n)] = \int_{[0,1]^d} f(x)\, dP_{Y_n}(x) = \int_{[0,1]^d} f(x) \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x)\, d\mu_d(x) = \int_{[0,1]^d} f(x)\, d\mu_d(x) = I$.

Et $E[|f(Y_n)|] \leq \|f\|_1$.

Donc les $f(Y_n)$ sont intégrables, et sont iid car les $(Y_n)_n$ sont iid.

La loi forte des grands nombres s'applique alors et nous dit que $S_n - \underbrace{E[f(Y_1)]}_{= I} \underset{\mu_d\text{-p.s.}}{\longrightarrow} 0$.

2) On suppose $\|f\|_\infty < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\alpha > 0$.

On a : $\mathbb{P}(S_n - I \geq \varepsilon \|f\|_\infty) = \mathbb{P}(\exp(\alpha(S_n - I)) \geq \exp(\alpha \varepsilon \|f\|_\infty)) \leq \frac{E[\exp(\alpha(S_n - I))]}{e^{\alpha \varepsilon \|f\|_\infty}}$

car $x \mapsto e^{\alpha x}$ croiss.

Or, $E[\exp(\alpha(S_n - I))] = E\left[\exp\left(\alpha\left(\frac{1}{n}\sum f(Y_i) - \frac{n}{n} I\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}\left(\sum (f(Y_i) - I)\right)\right)\right]$

$= E\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha}{n}(f(Y_i) - I)\right)\right] \underset{\text{iid}}{=} E\left[\exp\left(\frac{\alpha}{n}(f(Y_1) - I)\right)\right]^n$

3) $e^t \leq 1 + t + t^2$ sur $[-1,1]$.

En effet, pour $g(t) = e^{-t}(1 + t + t^2)$, $g'(t) = e^{-t}(1 + 2t - 1 - t - t^2) = e^{-t}(t - t^2) = e^{-t} t (1 - t)$

Donc g est décroiss sur $[-1,0]$, croiss sur $[0,1]$, et $g(0) = 1$.

Donc $e^{-t}(1 + t + t^2) \geq 1$ sur $[-1,1]$.

4) On a $|f(Y_1) - I| \leq \|f\|_\infty + \int_{[0,1]^d} |f(x)|\, d\mu_d(x) \leq 2\|f\|_\infty$.

Ainsi, si $\frac{\alpha}{n} \times 2\|f\|_\infty \leq 1 \iff \alpha \leq \frac{n}{2\|f\|_\infty}$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - I| \geq \varepsilon \|f\|_\infty) \leq e^{-\alpha \varepsilon \|f\|_\infty} \times \left[E\left[1 + \frac{\alpha}{n}(f(Y_1) - I) + \frac{\alpha^2}{n^2}(f(Y_1) - I)^2\right]\right]^n$$

Or, $E[1] = 1$, $E[f(Y_1) - I] = E[f(Y_1)] - I = 0$

$0 \leq E[(f(Y_1) - I)^2] = \mathrm{var}(f(Y_1)) = E[f(Y_1)^2] - E[f(Y_1)]^2 \leq \|f\|_2^2$.

Donc $\mathbb{P}(|S_n - I| \geq \varepsilon \|f\|_\infty) \leq e^{-\alpha \varepsilon \|f\|_\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\|f\|_2^2\right)^n$

$\leq e^{-\alpha \varepsilon \|f\|_\infty} e^{\frac{\alpha^2}{n}\|f\|_2^2}$ car $1 + x \leq e^x$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow 1 + \frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ sur $[0 ; +\infty[$.

$\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 \|f\|_2^2}{n} - \alpha \varepsilon \|f\|_\infty\right)$

On cherche α_0 minimisant le terme de droite.

On trouve alors $\alpha_0 = (-1) \times \frac{-\varepsilon \|f\|_\infty}{2 \frac{\|f\|_2^2}{n}} = \frac{n \varepsilon \|f\|_\infty}{2\|f\|_2^2}$.

On a besoin de $\alpha_0 \leq \frac{n}{2\|f\|_\infty}$, ce qui donne : $\frac{n \varepsilon \|f\|_\infty}{2\|f\|_2^2} \leq \frac{n}{2\|f\|_\infty} \iff \varepsilon \leq \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty^2}$.

Et $\alpha_0^2 \frac{\|f\|_2^2}{n} - \alpha_0 \varepsilon \|f\|_\infty = \frac{n \varepsilon^2 \|f\|_\infty^2}{4\|f\|_2^2} - n\frac{\varepsilon^2 \|f\|_\infty^2}{2\|f\|_2^2} = -n \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\|f\|_\infty^2}{\|f\|_2^2}$

Donc $\forall \varepsilon \in \left[0 ; \frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_\infty^2}\right]$, $\mathbb{P}(|S_n - I| \geq \varepsilon \|f\|_\infty) \leq 2 \exp\left(-n \left(\frac{\varepsilon \|f\|_\infty}{2\|f\|_2}\right)^2\right)$ □

AGNIEL Vidal

Ref : Ouvrard, Probabilités 2 (mais incomplet)

Recasages : 236, 262, 263