<u>Références</u> :
Analyse pour l'agrégation, Hervé Queffélec, Claude Zuily p270

Rappel (Théorème de Baire).
Soit (E,d) un espace métrique complet. Alors

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est encore dense dans E.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

Prop. *L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Démonstration.
<u>But</u> : On veut montrer qu'il existe $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite d'ouverts denses telle que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i \subset A$.
Comme $(C^0([0,1]), ||.||_\infty)$ est complet, on aura le résultat.
Soit $B = A^c$ l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point de [0,1]. Soit $f \in B$ alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est bornée lorsque $h \to 0$.
Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = \{f \in C^0([0,1]) : \exists x \in [0,1] : \forall y \in [0,1], |f(x)-f(y)| \leq n|x-y|\}.$$

On a donc $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ et nous allons montrer que F_n est fermé et que $\mathring{F}_n = \varnothing$.

- F_n est fermé.
  Soit (f_k) une suite de F_n qui converge uniformément vers f dans $C^0([0,1])$. A chaque f_k correspond $x_k \in [0,1]$ tel que pour tout $y \in [0,1]$, on ait

$$|f_k(y) - f_k(x_k)| \leq n|y - x_k|.$$

De la suite (x_k) on peut extraire une sous-suite, encore notée (x_k), convergeant vers $x_0 \in [0,1]$. Soit $y \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_k(x_k)| \\ &+ |f_k(x_k) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq \underbrace{2||f - f_k||_\infty}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ k\to\infty}} + \underbrace{|f(x_0) - f(x_k)|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ k\to\infty \\ \text{par continuité de } f}} + \underbrace{n|x_k - y|}_{\substack{\longrightarrow n|x_0-y| \\ k\to\infty}} \end{aligned}$$

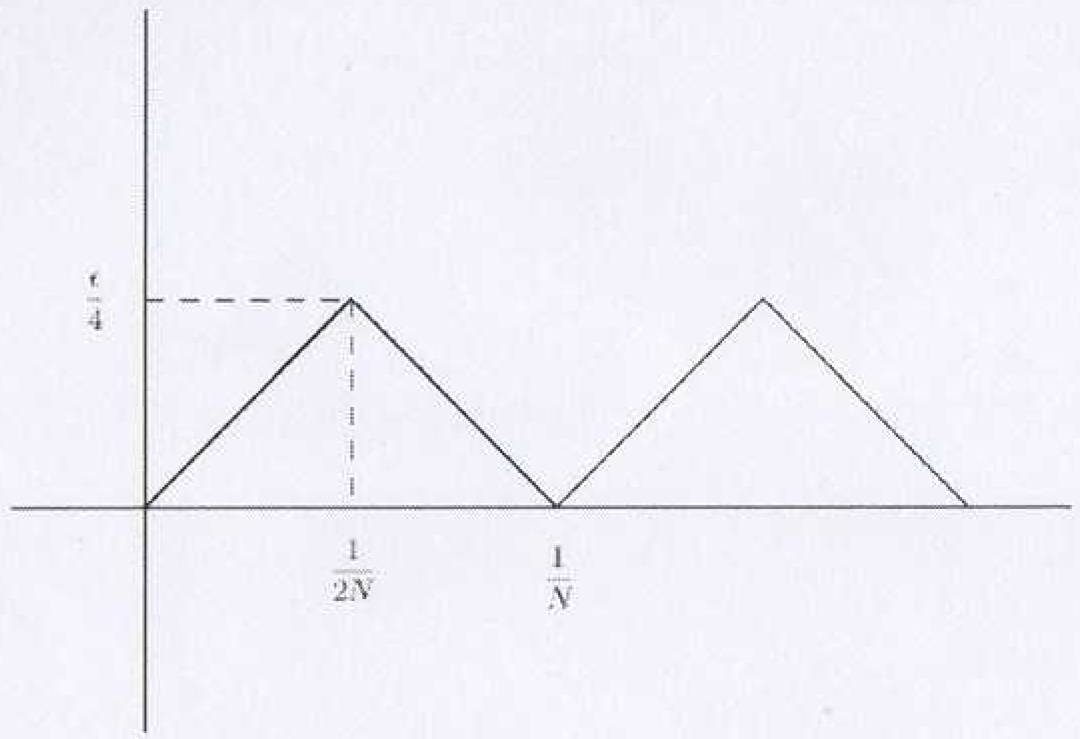
Donc $f \in F_n$ et F_n est fermé.

- $\mathring{F}_n = \varnothing$.
  Pour tout $f \in F_n$, pour tout $\epsilon > 0$, on veut montrer que $B(f,\epsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$.
  On a

$$F_n^c = \{g \in C^0([0,1]), \forall x_0 \in [0,1], \exists y \in [0,1], |g(x_0)-g(y)| > n|x_0-y|\}.$$

Comme les polynômes sont denses dans les fonctions continues, il existe un polynôme P tel que $||P - f||_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit N un entier. On découpe l'intervalle [0,1] en $\bigcup_{k=0}^{N-1} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ et on considère la fonction g_0 périodique de période $\frac{1}{N}$ qui sur $[0, \frac{1}{N}]$ est égale à

$$\begin{cases} g_0(x) = \frac{\epsilon N}{2} x, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2N} \\ g_0(x) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon N}{2} x, \text{ si } \frac{1}{2N} \leq x \leq \frac{1}{N} \end{cases}$$



La fonction g_0 est continue sur [0,1] et dérivable sauf en un nombre fini de points et aux points où elle est dérivable, on a $|g_0'(x)| = \frac{\epsilon N}{2}$. De plus, $\sup_{x\in[0,1]} |g_0(x)| = \frac{\epsilon}{4}$. Posons $g = P + g_0$, alors

$$\begin{aligned} ||f-g||_\infty &\leq ||f-P||_\infty + ||g_0||_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

De plus, on a, pour tout $x \in [0,1]$, qu'il existe $y \in [0,1]$ proche de x tq $|g_0(x)-g_0(y)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x-y|$

Et on a : $|P(y)-P(x)| = P'(c)\,|y-x|$ pour $c \in]\inf(x,y)\,;\sup(x,y)[$

Donc $|g(y)-g(x)| = \left|\frac{\varepsilon N}{2} \pm P'(c)\right| |y-x| \geq \left|\frac{\varepsilon N}{2} - \max_{[0,1]}|P'|\right| |y-x|$

Posons $M = \max_{[0,1]} |P'|$.

Pour N tel que $\frac{\epsilon}{2}N - M > n$, c'est-à-dire $N > \frac{2(n+M)}{\epsilon}$, on a donc $g \in B(f,\epsilon) \cap F_n^c$.

□

<u>Leçons possibles</u> : 201, 202, 205, 228

Changements par Vidal AGNIEL