Ref: Gostracker tome 2

Recasage : 144, 152, 159, 171

Détermination du nombre de racines réelles et complexes distinctes d'un polynôme :

Thm : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré n de racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ de multiplicités $n_1, \dots, n_q$.

On pose $s_p = \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^p$ $\forall p \in \mathbb{N}$. On a ainsi $s_p \in \mathbb{R}$.

et $S_n(x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k$. S_n est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ car $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $s_p \in \mathbb{R}$ car poly symétrique en les racines de P.

Alors si (p,q) est la signature de S_n, le nombre de racines réelles distinctes de P est $p-q$ et le nombre de racines complexes distinctes de P est $p+q$.

dém : ① $S_n(x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^{i+k} x_i x_k = \sum_{j=1}^{q} n_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j^i x_i \right)^2$

Posons $l_{\alpha_j} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j^i x_i$.

Soit j tel que α_j soit dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Écrivons $l_j = \widetilde{\alpha_j} + i\widetilde{\beta_j}$

Soit j' tel que $\alpha_{j'} = \overline{\alpha_j}$.

On a alors $n_j l_j^2 + n_{j'} l_{j'}^2 = n_j \left(l_j^2 + \overline{l_{j}}^2 \right)$ car $P \in \mathbb{R}[X]$ $= 2 n_j \widetilde{\alpha_j}^2 - 2 n_j \widetilde{\beta_j}^2$.

On sépare $\{j \text{ tq } \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$ en $J \cup J'$ tq si $j \in J$, le j' tq $\alpha_{j'} = \overline{\alpha_j}$ est dans J'

Posons J et $J' = \{j' ; j \in J\}$ et $J \cup J' = \{j, \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$.

donc $S_n(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \in \mathbb{R}}}^{q} n_j l_{\alpha_j}^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^{q} n_j \widetilde{\alpha_j}^2 - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^{q} n_j \widetilde{\beta_j}^2$.

② Vérifions que les formes linéaires l_{α_j}, $\widetilde{\alpha_j}$ et $\widetilde{\beta_j}$ sont linéairement indépendantes.

Il s'agit de remarquer que le déterminant de la matrice

$$\begin{array}{ccc} \alpha_j \in \mathbb{R} & j \in J & j \in J \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ \alpha_j \\ \alpha_j^2 \\ \vdots \\ \alpha_j^{q-1} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ \frac{\alpha_j + \overline{\alpha_j}}{2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_j^{q-1} + \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \frac{\alpha_j - \overline{\alpha_j}}{2i} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_j^{q-1} - \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2i} \end{matrix}\right] \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{array}$$

est non nul.

$C_{n_1+j} \to C_{n_1+n_2+j} + C_{n_1+j}$ puis $C_{n_1+n_2+j} \to C_{n_1+j} - C_{n_1+n_2+j}$

En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes, on se ramène au déterminant

$$\begin{array}{ccc} j \in \mathbb{R} & j \in J & j \in J \\ \left| \alpha_j^i \right. & \alpha_j^i & \left. \overline{\alpha_j}^i \right| \end{array}$$

qui est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde et les α_j sont distincts).

Ainsi les l_{α_j}, $\widetilde{\alpha_j}$ et $\widetilde{\beta_j}$ sont linéairement indépendants.

La signature de S_n est donc

$$\left(\left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{R}\}\right| + \frac{1}{2} \left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}\right|,\ \frac{1}{2} \left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}\right| \right)$$

d'où le résultat.

Exemple : $P = X^2 - bX + c$, λ_1, λ_2 les racines complexes.

On a $s_0 = 2$

$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = b$

$s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = b^2 - 2c$

donc $S_2(x) = 2x_0^2 + 2b\, x_0 x_1 + (b^2 - 2c) x_1^2$

$= 2\left(x_0 + \frac{b}{2} x_1\right)^2 + \left(b^2 - 2c - \frac{b^2}{2}\right) x_1^2$

$= 2\left(x_0 + \frac{b}{2} x_1\right)^2 + \frac{b^2 - 4c}{2} x_1^2$

donc la signature de S_2 est $(1,1)$ si $b^2 - 4c < 0$

$(1,0)$ si $b^2 - 4c = 0$

$(2,0)$ si $b^2 - 4c > 0$

et on retrouve le résultat connu.