Ref: Szpirglas
Recasages : 158, 159, 160, 161, 181

AGNIEL
Vidal

Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$, est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $|||\cdot|||_2$.

démonstration :

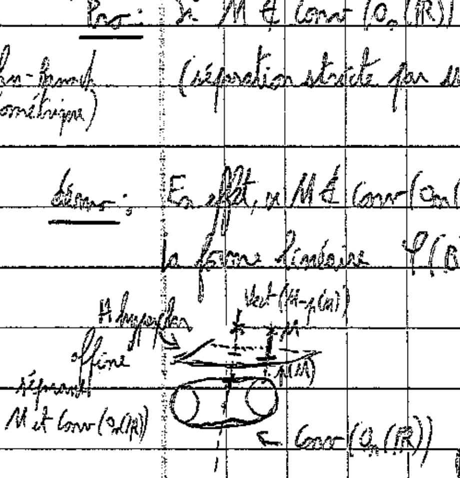
$O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est fermée dans $O_n(\mathbb{R})$ et est donc un convexe fermé borné, donc un convexe compact.

Étape 1 : Nous allons montrer la proposition avec la caractérisation suivante :

Pro : Si $M \notin \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$, alors $\exists \varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$ tq $\varphi(M) > \sup_{O\in O_n(\mathbb{R})}(\varphi(O)) = \sup_{O\in O_n(\mathbb{R})}(\varphi(O))$

(Hahn-Banach géométrique) (séparation stricte par un hyperplan affine).

démo : En effet, si $M \notin \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$, son projeté orthogonal $p(M)$ sur $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est différent de M. La forme linéaire $\varphi(B) = \langle M-p(M) ; B\rangle$ convient alors.



□

Pour ce faire, nous allons montrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ tq $|||M|||_2 \leq 1$, $\forall \varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$, $\varphi(M) \leq \sup_{O_n(\mathbb{R})}(\varphi(O))$

On se donne donc M tq $|||M|||_2 \leq 1$ et $\varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$.

Étape 2 : Pro : $\begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})^* \\ A \mapsto (B \mapsto \mathrm{Tr}(AB)) \end{array}$ est un isomorphisme d'ev.

démo : $\dim(M_n(\mathbb{R})^*) = \dim(M_n(\mathbb{R}))$, et l'application est bien définie et linéaire.
Montrons qu'elle est injective.
Soit A tq $\mathrm{Tr}(A\,\cdot) \equiv 0$. Alors $\mathrm{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$ $\forall i,j$
Donc $A = 0$. □

On a donc $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi(\cdot) = \mathrm{Tr}(A\,\cdot)$.

On veut donc mq $\mathrm{Tr}(AM) \leq \sup_{O\in O_n(\mathbb{R})}(\mathrm{Tr}(AO))$.

Étape 3 : Nous allons utiliser la décomposition polaire généralisée pour calculer/majorer/minorer plus facilement nos termes

Thm : $\exists (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = \Omega S$ (décomposition polaire généralisée)

démo : Supposons A inversible

Alors ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et admet donc une racine carrée $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

On a alors : ${}^t(AS^{-1})AS^{-1} = I_n \Rightarrow \underbrace{AS^{-1}}_{\Omega} \in O_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $A = \tilde{\Omega}\hat{S}$, alors on a $\tilde{\Omega}^{-1}\Omega = \hat{S}S^{-1} \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{I_n\}$

Donc $(\tilde{\Omega}; \hat{S}) = (\Omega; S)$.

Si A est inversible, sa décomposition polaire est unique.

– Si A n'est pas inversible, on a $A_k \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_k \to A$.

On a ainsi $A_k = \Omega_k S_k$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact on a une extractrice $\Omega_{\varphi(k)}$ qui cv vers $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. Par continuité du produit et de l'inverse, $S_{\varphi(k)} = \Omega_{\varphi(k)}^{-1}A_{\varphi(k)}$ est convergente.

Donc $S_{\varphi(k)} \to S \in S_n^+(\mathbb{R}) = \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$, donc $A = \Omega S$. □

$\Omega^{-1}A$.

Étape 4 : On peut passer au calcul :

$$\sup_{O \in O_n(\mathbb{R})} (\mathrm{Tr}(AO)) \geq \mathrm{Tr}(A\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}(\Omega^{-1}\Omega S) = \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$ où λ_i sont les v.p. de S dans $\mathbb{C}$.

Comme $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ et on a $\{e_1, \dots, e_n\}$ b.o.n tq $Se_i = \lambda_i e_i$ $\forall i$.

On trouve alors : $$\mathrm{Tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n} \langle AMe_i ; e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i ; M^* e_i \rangle \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_i \|Ae_i\|_2 \|M^* e_i\|_2$$

$$\leq \sum_i \|Ae_i\|_2 |||M^*|||_2 \|e_i\|_2$$

$$\leq \sum_i \|\Omega S e_i\| \times 1 \times 1$$

Donc $\mathrm{Tr}(AM) \leq \sum_i \|Se_i\| = \sum_i \sqrt{\langle Se_i ; Se_i \rangle} = \sum_i \sqrt{\lambda_i^2} = \sum_i \lambda_i$. car $|||M^*|||_2 = |||M|||_2 \leq 1$

D'où $\mathrm{Tr}(AM) \leq \sup_{O_n(\mathbb{R})} (\mathrm{Tr}(AO))$.

Donc $M \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ □