AGNIEL Vidal
2016-2017

Leçons : 201, 208, 213, 243, 245, 239, 202, 234, 205

Références : Bayen, Margaria, Espaces de Hilbert et opérateurs, tome ...

DUREN Peter, Bergman Spaces

PAULSEN Vern, An introduction to the theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces

SHAPIRO Joel, Composition operators and classical function theory.

AGNIEL Vidal, Internship report : Study of weighted composition operators on Bergman and Hardy spaces

Espace de Bergman du disque unité

Ce développement concerne l'étude de l'espace $B^2(\mathbb{D}) = \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$.
On munit $B^2(\mathbb{D})$ du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$.

Lemme :

$\forall K$ compact de $\mathbb{D}$, on a : $\quad \forall f \in B^2(\mathbb{D}),\ \|f\|_{L^\infty, K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K;\partial\mathbb{D})} \times \|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$

démo :

Soit $z_0 \in K$. $\forall 0 < r < d(z_0;\partial\mathbb{D}) = 1-|z_0|$, la formule de la moyenne nous donne : $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$

D'où : $\displaystyle \int_0^r f(z_0)\rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\rho\, d\rho\, d\theta$

$$\frac{r^2}{2} f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}(0;r)} f(z)\, dx\, dy$$

Donc $\displaystyle |f(z_0)| \leq \frac{1}{\pi r^2}\left|\int_{\mathbb{D}(0,r)} f(z)\,dx\,dy\right| \leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)|\,dx\,dy\right) \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)|^2 dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{\mathbb{D}(0,r)} 1^2 dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|_{L^2(\mathbb{D}(0,r))} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$

Donc $|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$, $\forall 0 < r < d(z_0;\partial\mathbb{D})$.

En faisant tendre r vers $d(z_0;\partial\mathbb{D})$, on a alors $|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(z_0;\partial\mathbb{D})}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} \underset{\text{car } z_0 \in K}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K;\partial\mathbb{D})}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$.

Donc $\|f\|_{L^\infty, K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K;\partial\mathbb{D})}\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}$. □

Prop :

$(B^2(\mathbb{D}); \langle\cdot;\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{D})})$ est un espace de Hilbert.

démo :

$B^2(\mathbb{D})$ est un s-ev de $L^2(\mathbb{D})$. Reste à mq il est fermé pour $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{D})}$.

Soit $(f_n)_n \in B^2(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Comme $L^2(\mathbb{D})$ est un Hilbert, elle converge vers $g \in L^2(\mathbb{D})$.

Le lemme appliqué à $f_n - f_m$, $\forall n,m \geq 0$ nous dit que $\forall K$ compact de $\mathbb{D}$, $(f_n|_K)_n$ est de Cauchy dans $(C^0(K); \|\cdot\|_{L^\infty,K})$, qui est complet.

On a donc $f \in C^0(\mathbb{D})$ qui est limite uniforme de $(f_n)_n$ sur tout compact de $\mathbb{D}$.

D'après le théorème de Weierstrass, f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

De plus, $\forall K$ compact de $\mathbb{D}$, on a $\|f_n|_K - f|_K\|_{L^2} \leq \text{Aire}(K)^{\frac{1}{2}} \times \|f_n - f\|_{L^\infty,K} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $f_n|_K \xrightarrow{L^2(K)} g|_K$ et $f_n|_K \xrightarrow{L^2(K)} f|_K$, donc $g|_K \underset{pp}{=} f|_K$, $\forall K$ compact, donc $g \underset{pp}{=} f$, donc $f_n \xrightarrow[L^2(\mathbb{D})]{} f$ et $f \in B^2(\mathbb{D})$, ce qui conclut. □

On définit $e_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$$

Prop :

$\{e_n, n \geq 0\}$ forme une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

démo :

– On a : $\langle e_n ; e_m \rangle = \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}} \int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m \, dx\,dy$, et $\int_{\mathbb{D}} z^n \bar{z}^m \, dx\,dy = \left(\int_0^1 r^{n+m+1} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta\right)$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \left[\frac{r^{n+m+2}}{n+m+2}\right]_0^1 \times 2\pi = \frac{2\pi}{n+m+2} \text{ si } n = m \end{cases}$$

Donc $\langle e_n ; e_m \rangle = \frac{\sqrt{(n+1)(n+1)}}{\pi} \times \frac{2\pi}{n+n+2} \delta_{n,m}$

$$= \frac{n+1}{\pi} \times \frac{2\pi}{2(n+1)} \delta_{n,m} = \delta_{n,m}$$

$\langle e_n ; e_m \rangle$ est donc une famille orthonormée.

– Soit $f \in B^2(\mathbb{D})$ orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_n, n \geq 0)$.

Notons $c_n(f) = \langle f ; e_n \rangle$. On a donc $c_n(f) = 0$.

Comme $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, on a $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

On a : $c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z) \bar{z}^n \, dx\,dy = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{|z|<r} f(z) \bar{z}^n \, dx\,dy \right)$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{|z|<r} \sum_m a_m z^m \bar{z}^n \, dx\,dy \right) \text{ par convergence dominée}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1^-} \left(\sum_{m \geq 0} \int_{|z|<r} a_m z^m \bar{z}^n \, dx\,dy \right) \text{ par convergence normale}$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \to 1^-} \left(a_m \times \frac{2\pi}{2(m+1)} r^{2(m+1)} \right) \text{ par le premier point}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{m+1}} \times a_m$$

Donc $\forall m \geq 0$, $a_m = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Donc $\mathrm{Vect}(e_n)^{\perp} = \{0\}$, ce qui conclut. $\square$

Théorème :

$$\forall f \in B^2(\mathbb{D}), \forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1 - \bar{w} z)^2} \, dx\,dy$$

démo :

$\forall z \in \mathbb{D}, \forall f \in B^2(\mathbb{D})$, on a $|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(z ; \partial\mathbb{D})} \|f\|_{L^2}$. Donc l'opérateur d'évaluation $\delta_z : \begin{array}{l} B^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C} \\ f \mapsto f(z) \end{array}$ est continu pour $\|\cdot\|_{L^2}$.

Par le théorème de Riesz, $\exists!\, h_z \in B^2(\mathbb{D})$ tq $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \langle f ; h_z \rangle$.

On a donc $h_z = \sum_{n \geq 0} \langle h_z ; e_n \rangle e_n \Rightarrow \forall w \in \mathbb{D}$, $h_z(w) = \sum_n \overline{e_n(z)}\, e_n(w) = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{\pi} (\bar{z} w)^n = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(1 - w\bar{z})^2}$

Ainsi, pour $K(z;w) = \overline{k_z(w)} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(1-\bar{w}z)^2}$, on a : $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), \forall z \in \mathbb{D}, \ f(z) = \langle f ; k_z \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w) \times K(z;w)\, dx\, dy$. $\square$

Rem : (Diverses et variées)

_ Une telle fonction K est appelée noyau de reproduction de l'espace de Hilbert : $\begin{cases} \forall z, \ \overline{K(z;\cdot)} \in B^2(\mathbb{D}) \\ \forall z, \forall f \in B^2(\mathbb{D}), \ f(z) = \langle f ; \overline{K(z;\cdot)} \rangle \end{cases}$

_ K est unique, vérifie $K(z;w) = \langle k_z ; k_w \rangle = \overline{K(w;z)}$, donc $K(z;z) \in \mathbb{R}$

_ On a aussi : $\|\delta_z\| = K(z;z) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(1-|z|^2)^2}$.

_ Ainsi que : $\forall n \geq 1, \ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{D}, \ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_i K(x_i; x_j) \bar{a_j} = {}^t\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \left(K(x_i;x_j)\right)_{i,j} \begin{pmatrix} \bar{a_1} \\ \vdots \\ \bar{a_n} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (*)$

$$\| \qquad \langle \sum_i a_i k_{x_i} ; \sum_j a_j k_{x_j} \rangle = \| \sum_{i=0}^{n} a_i k_{x_i} \|_{B^2(\mathbb{D})}.$$

_ $B^2(\mathbb{D})$ est appelé espace de Hilbert à noyau de reproduction.
Un noyau de repro donne de bons résultats dans l'étude d'opérateurs de composition sur l'espace.

_ Tous les résultats peuvent être généralisés à $B^2(\Omega)$, Ω ouvert simplement connexe, grâce au th d'Uniformisation de Riemann. $\Omega \neq \mathbb{C}$

_ Pour p le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$, on a :

$\forall f \in L^2, \forall z \in \mathbb{D}, \ p(f)(z) = \langle p(f) ; k_z \rangle = \langle f ; p(k_z) \rangle = \langle f ; k_z \rangle$.

Donc $p(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(z;w)\, dx\, dy$

_ Le noyau de repro K définit entièrement l'espace $(B^2(\mathbb{D}) ; \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{D})})$: L'espace de Hilbert $(H ; \|\cdot\|)$ (ensemble + norme) de fonctions de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ pour lequel K est un noyau de reproduction est unique. (s'il existe)

_ $\overline{\text{Vect}\left(\overline{K(z;\cdot)}\right)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = B^2(\mathbb{D})$.

_ La propriété $(*)$ définit une fonction noyau, élément de base de la théorie des esp de Hilbert à noyau de reproduction.
(Si $f : X \times X \to \mathbb{C}$ est une fonction noyau, alors $\exists ! \ (H ; \|\cdot\|)$ Hilbert inclus dans $\text{Fonct}(X;\mathbb{C})$ tq f est le noyau de repro de $(H ; \|\cdot\|)$)

_ $B^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \ f(z) = \sum a_n z^n \text{ tq } \left(a_n \times \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\right)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}$, et $\langle f ; g \rangle_{L^2(\mathbb{D})} = \sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{n+1} a_n \bar{b_n}$

_ Avec ce point de vue, on peut définir l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D}) = \{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \ f(z) = \sum a_n z^n \text{ tq } (a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) \}$.
Pour $\langle f ; g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \sum a_n \bar{b_n}$ H^2 est un Hilbert car isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$. $((a_n)_n = (0)_n \Leftrightarrow f = 0)$
On montre alors que $\langle f ; g \rangle_{H^2} = \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{|z|=r} f(z) \overline{g(z)}\, dx\, dy \right)$
Donc $H^2(\mathbb{D}) = \{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \text{ tq } f \text{ a un prolongement sur } \partial\mathbb{D} \text{ dans } L^2(\partial\mathbb{D}) \}$. On a $H^2(\mathbb{D}) \subsetneq B^2(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D})$, et $\|\cdot\|_{B^2(\mathbb{D})} \leq \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{D})}$
Et $H^2(\mathbb{D})$ est aussi un Hilbert à noyau de repro, qui est $K_{H^2}(z;w) = \frac{1}{1-\bar{w}z}$:
Donc $\forall f \in L^2(\mathbb{D}), \ p(f)(z) = \lim_{r \to 1^-} \left(\int_{|w|=r} f(w) K(z;w)\, dx\, dy \right) \in H^2(\mathbb{D})$, c'est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sur $H^2(\mathbb{D})$.