AGNIEL Vidal
BERAUD Vivien

105,142

Développement : Caractérisation des polynômes alternés à n indéterminées

Théorème :

Soit A un anneau intègre. Soit $n \geq 0$.

$\mathfrak{S}_n$ agit sur $A[X_1, \dots, X_n]$ par $\sigma . P(X_1, X_2, \dots, X_n) := P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$.

Soit $V_n := \prod_{i<j} (X_i - X_j)$, $\Theta_n = \prod_{i<j} (X_i + X_j)$. Soit $W_n = \frac{1}{2}(V_n + \Theta_n)$.

Alors, $W_n \in A[X_1, \dots, X_n]$ et :

$$A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{A}_n} = A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \oplus W_n . A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tq $\varepsilon(\tau) = -1$, on a aussi : $\dfrac{A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}[T]}{\langle T^2 - \Theta_n T + W_n(\tau W_n) \rangle} \underset{A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}\text{ algèbres}}{\overset{\text{isom de}}{\simeq}} A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{A}_n}$.

démo :

Etape 1 :

L'ensemble des polynômes $\left|\begin{array}{l}\text{symétriques}\\ \text{alternés}\end{array}\right.$ est une sous-A-algèbre de $A[X_1, \dots, X_n]$.

$0, 1$ sont $\left|\begin{array}{l}\text{symétriques}\\ \text{alternés}\end{array}\right.$, et $\forall P, Q$ $\left|\begin{array}{l}\text{symétriques}\\ \text{alternés}\end{array}\right.$, $\forall \lambda \in A$, $\begin{array}{l}\sigma(\lambda P) = \lambda \sigma(P) = \lambda P \\ \sigma(P+Q) = \sigma(P) + \sigma(Q) = P + Q \\ \sigma(P.Q) = \sigma(P).\sigma(Q) = P.Q.\end{array}$ $\quad \forall \sigma \in \left|\begin{array}{l}\mathfrak{S}_n\\ \mathfrak{A}_n\end{array}\right.$.

Etape 2 :

V_n, Θ_n sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

En projetant leurs coefficients dans $\mathbb{F}_2$, on trouve : $V_n = \Theta_n \Rightarrow V_n + \Theta_n = 0$ dans $\mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_n]$.

Donc $V_n + \Theta_n = 2 . W_n$, avec $W_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.

Comme tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre, W_n peut ainsi être vu dans $A[X_1, \dots, X_n]$.

Etape 3 :

Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{A}_n}$ un polynôme alterné.

Soient $\tau, \tilde{\tau} \in \mathfrak{S}_n$ tq $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tilde{\tau}) = -1$. Alors $\tau . P = (\tau(\tau^{-1}\tilde{\tau}))P = \tilde{\tau} P$, car $\tau^{-1}\tilde{\tau} \in \mathfrak{A}_n$.

Ainsi, τP ne dépend pas de la permutation de signature impaire choisie.

Posons $\hat{P} = P - \tau P$. On a $\tau \hat{P} = \tau P - P = -\hat{P}$.

On a aussi : $\begin{cases} \tau . V_n = \varepsilon(\tau) . V_n = -V_n \\ \tau . \Theta_n = \Theta_n \end{cases} \Rightarrow \tau . W_n = \frac{1}{2}(-V_n + \Theta_n) = \Theta_n - W_n = W_n - V_n$.

calculé dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ puis replongé dans $A[X_1, \dots, X_n]$

Etape 4 :

Soit (i,j) avec $1 \leq i < j \leq n$. Prenons $\tau = (i\,j)$, et évaluons $\hat{P}$ en $X_j = X_i$:

$$\hat{P}(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) - P(X_1, \dots, X_i, \dots, X_i, \dots, X_n) = 0$$

Comme A est intègre, $A[X_1, \dots, X_n]$ intègre, donc $X_i - X_j \mid \hat{P}$.

De plus, soit $(\hat{i}, \hat{j}) \neq (i,j)$, $1 \leq \hat{i} < \hat{j} \leq n$. Supposons que $\hat{i} \neq i$, $\hat{i} \neq j$. Alors $X_{\hat{i}} - X_{\hat{j}} \mid \hat{P}$, mais $X_{\hat{i}} - X_{\hat{j}} \nmid X_i - X_j$ car $X_j - X_i$ évalué en $X_{\hat{j}} = X_{\hat{i}}$ n'est pas le polynôme nul.

Même chose si l'on suppose $\hat{j} \neq i$, $\hat{j} \neq j$.

Ainsi, $\prod_{i<j} (X_i - X_j) \mid \hat{P} \Rightarrow \hat{P} = V_n \cdot Q$, $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$.

Revenons à $\tau \in \mathfrak{S}_n$ avec $\varepsilon(\tau) = -1$. Alors $\tau\hat{P} = (\tau V_n)(\tau Q) = -V_n(\tau Q) \Rightarrow V_n(Q - \tau Q) = 0$

$\tau\hat{P} = -\hat{P} = -(V_n Q)$ $\Rightarrow Q = \tau Q$ par intégrité.

Comme les transpositions sont de signature impaire, Q est invariant par l'action des transpositions, donc invariant par $\langle\{\text{transpositions}\}\rangle = \mathfrak{S}_n$. Donc Q est symétrique.

Etape 5 :

Considérons $P - W_n Q$. Montrons que ce polynôme est symétrique.

Soit τ une transposition. On a $\varepsilon(\tau) = -1$, d'où :

$$\begin{aligned} \tau(P - W_n Q) &= \tau P - (\tau W_n)(\tau Q) = \tau P - (W_n - V_n) Q = \tau P + V_n Q - W_n Q \\ &= \tau P + (P - \tau P) - W_n Q \\ &= P - W_n Q. \end{aligned}$$

Par le même argument qu'à l'étape 4, $P - W_n Q$ est donc bien symétrique, car stable sous l'action de toute transposition.

Ainsi, $\underset{\text{alterné}}{P} = \underset{\text{sym}}{(P - W_n Q)} + W_n \cdot \underset{\text{sym}}{Q}$.

De plus, pour P symétrique, $P \neq 0$, si $P = W_n Q$, alors $\tau P = P \Rightarrow (\tau W_n) Q = W_n Q$ $\Rightarrow \tau W_n = W_n$ $\forall \tau$, ce qui est faux.

Ainsi, $\{P, \text{symétrique}\} \cap \{W_n P, P \text{ symétrique}\} = \{0\}$.

On a donc unicité de cette décomposition.

Etape 6 :

On a $(\tau W_n) W_n = (\Theta_n - W_n) W_n = \Theta_n W_n - W_n^2$. Or $(\tau W_n)(W_n)$ est symétrique, et Θ_n aussi.

Donc $T^2 - \Theta_n T + W_n(\tau W_n) \in A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$, et W_n est une racine de ce polynôme.

$\dfrac{A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}[T]}{\langle T^2 - \Theta_n T + W_n(\tau W_n) \rangle}$ est une $A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$-algèbre de dimension 2, dont une base est $\{1 ; \bar{T}\}$.

$W_n \notin A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$

Et par l'étape 5, $A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{A}_n}$ est une $A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$-algèbre de base $\{1 ; W_n\}$. On a ainsi l'isomorphisme annoncée.

Rem : L'énoncé est aussi vrai si A n'est pas intègre.

Il faut alors prouver que V_n, $(X_i - X_j)$, W_n sont des éléments réguliers de $A[X_1, \dots, X_n]$.

Si 2 est inversible dans A, alors on peut utiliser l'égalité : $P = \frac{P - \tau P}{2} + \frac{P + \tau P}{2}$

$$\Rightarrow P = V_n \frac{Q}{2} + \frac{P + \tau P}{2}$$

symétriques

Et V_n est racine de $T^2 - V_n^2$ dans $A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}[T]$.

Cet argument ne tient plus dès que $2 \notin A^\times$, notamment lorsque car $(A) = 2$.