Ref : Ouvrard 2 Recasages : 260, 261

## Fonction caractéristique et moments



Repris par Vidal AGNIEL

**Théorème :** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On note $\varphi_X$ sa fonction caractéristique.

① Si $X$ admet un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_X$ est $\mathcal{C}^m$ et pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\, dP$. En particulier, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

② Si $\varphi_X$ est $k$-fois dérivable en $0$, avec $k \geq 2$, $X$ admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, donnés par $\mathbb{E}[X^j] = (-1)^j \varphi_X^{(j)}(0)$.

**Démonstration :**

① Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on a $\frac{d^k}{dt^k} \exp(itX) = (iX)^k \exp(itX)$, donc $\left|\frac{d^k}{dt^k}\exp(itX)\right| \leq |X|^k$, et $|X|^k$ est intégrable, car $X$ admet un moment d'ordre $m$, donc admet un moment d'ordre $k$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale appliqué $m$ fois donne $\varphi_X$ de classe $\mathcal{C}^m$ et, pour tous $k \in [\![1, m]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\, dP$.

En évaluant en $t = 0$, on trouve $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_\Omega X^k\, dP = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Soit $\varphi_X$ de classe $C^m$. Montrons par récu sur $2 \leq k \leq 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $k$ pair, que $\mathbb{E}[|X|^k] < +\infty$ :

② On commence par prouver le résultat pour $k = 2$.

Par Taylor-Young, on a $\varphi_X(t) = \underbrace{\varphi_X(0)}_{=1} + t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$,

$$\varphi_X(-t) = \varphi_X(0) - t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$

donc $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2 = t^2 \varphi_X''(0) + o(t^2)$, ce qui donne $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} = \varphi_X''(0)$.

De plus, $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\,\mathrm{Re}(\varphi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$, donc $\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\varphi_X''(0)$.

Soit $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $0$.

On a $\int_\Omega X^2\, dP = \mathbb{E}\left[2 \liminf_{m \to +\infty} \frac{1 - \cos(t_m X)}{t_m^2}\right]$

$$\leq 2 \liminf_{m \to +\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(t_m X)}{t_m^2}\right] \quad \text{par Fatou}$$

$$\leq -\varphi_X''(0) < +\infty$$ et $|X|^2 = X^2$, donc $\mathbb{E}[|X|^2] < +\infty$.

car $X^2 = \liminf_{m} \left(\frac{1 - \cos(\frac{1}{m}X)}{(\frac{1}{m})^2}\right) \times 2$

On suppose à présent avoir montré l'existence de tous les moments jusqu'à l'ordre $k = 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2$.

On va montrer que le moment d'ordre $2m = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ existe.

On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) = (-1)^{m-1} \times 2\mathbb{E}[X^{2(m-1)} \cos(tX)]$.

En particulier, on a $\varphi_X^{2(m-1)}(0) = (-1)^{m-1}\mathbb{E}[X^{2(m-1)}]$.

Par hypothèse, $\varphi_X^{2(m-1)}$ est deux fois dérivable en $0$, donc, par Taylor-Young :

$$\varphi_X^{2(m-1)}(t) = \varphi_X^{2(m-1)}(0) + t\varphi_X^{2m-1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$$

$$\varphi_X^{2(m-1)}(-t) = \varphi_X^{2(m-1)}(0) - t\varphi_X^{2m-1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$$

d'où $\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(m-1)}(0) = t^2 \varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$,

ce qui donne $\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(m-1)}(0)}{t^2} = \varphi_X^{2m}(0)$,

Donc $(-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} E\left[2X^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2} \times \frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right] = -\left(\frac{\varphi_X^{(2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1)}(t) + \varphi_X^{(2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1)}(-t) - 2\varphi_X^{(2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1)}(0)}{t^2}\right)$.

$\downarrow t \to 0$

$-\varphi_X^{(2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor)}(0) < +\infty$

On a donc $\int_\Omega X^{2m}\, dP = \mathbb{E}\left[2X^{2(m-1)} \liminf_{m \to +\infty} \frac{1 - \cos(t_m X)}{t_m^2}\right]$ où $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels convergeant vers $0$

$$\leq 2 \liminf_{m \to +\infty} \mathbb{E}\left[X^{2(m-1)} \cdot \frac{1 - \cos(t_m X)}{t_m^2}\right] \quad \text{par Fatou}$$

$$\leq (-1)^m \varphi_X^{2m}(0) < +\infty$$

donc $X$ admet un moment d'ordre $2m$.