Ref : 218, 219, 223, 224, 226

Méthode de Newton polynomiale

Ref :

Théorème :

Soit $P(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ où $\lambda_1 < \dots < \lambda_n \in \mathbb{R}$ (si $P(X)=\prod(X-\lambda_i)^{m_i}$, on regarde $\frac{P}{pgcd(P,P')}$)

On veut approximer λ_n par une suite récurrente.

$f : \begin{array}{l} [\lambda_n ; +\infty[\to [\lambda_n ; +\infty[\\ x \mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \end{array}$ est bien définie, et $\forall x \in [\lambda_n, +\infty[$, $\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_n$ avec
u_n décroissante
u_n CV linéairement vers x
u_n CV quadratiquement vers x àpcr.

démo :

Par le th de Rolle, les racines de P' sont dans $]\lambda_1 ; \lambda_n[$. Donc $\exists \eta > 0$ tq sur $[\lambda_n - \eta ; +\infty[$, P' ne s'annule pas, donc f est bien def et de classe C^∞ sur cet intervalle.
λ_n est le seul point fixe de f, donc si $(u_n)_n$ CV, $u_n \to \lambda_n$.

– On va mq $(u_n)_n$ est bien définie en montrant que f est croissante sur $[\lambda_n ; +\infty[$

On regarde donc $f'(x)$, $x > \lambda_n$. On écrit : $f(x) = x - \frac{1}{\underbrace{\frac{P'(x)}{P(x)}}_{\text{dérivée logarithmique de } P}} = x - \frac{1}{\sum \frac{1}{x-\lambda_i}}$. D'où $f'(x) = 1 - \frac{-\sum \frac{-1}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum \frac{1}{x-\lambda_i}\right)^2} = 1 - \underbrace{\frac{\sum \frac{1}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum \frac{1}{x-\lambda_i}\right)^2}}_{0 < \cdot < 1 \text{ car } \frac{1}{x-\lambda_i} > 0 \ \forall i}$

$0 < \cdot < 1$

Donc $f'(x) > 0$, donc $\forall x > \lambda_n$, $f(x) > f(\lambda_n) = \lambda_n$.

Donc u_n bien def. Et $u_{n+1} - u_n = -\frac{P(u_n)}{P'(u_n)} < 0$, donc $(u_n)_n$ décroissante.

– On va mq $(u_n)_n$ CV via le th de Picard-Banach. On a $f([\lambda_n ; +\infty[) \subset [\lambda_n ; +\infty[$, $|f'(x)| < 1 \quad \forall x > \lambda_n$.

On regarde en λ_n : $f'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} \Rightarrow f'(\lambda_n) = 1 - \frac{P'(\lambda_n)^2}{P'(\lambda_n)^2} = 0$.

On regarde quand $x \to +\infty$. $f'(x) = 1 - \frac{\sum \frac{1}{(x-\lambda_i)^2}}{\left(\sum \frac{1}{x-\lambda_i}\right)^2} = 1 - \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{\sum \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda_i}{x}\right)^2}}{\left(\sum \frac{1}{1-\frac{\lambda_i}{x}}\right)^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 - \frac{\sum 1^2}{(\sum 1)^2} = 1 - \frac{1}{n} \in]0,1[$.

Comme f' est C^∞ sur $[\lambda_n ; +\infty[$, on a donc que $\sup_{[\lambda_n ; +\infty[} |f'(x)| < 1$.

Donc f est k-contractante, $k = \sup_{[\lambda_n ; +\infty[} |f'|$, donc le th de Picard-Banach s'applique. $\forall n \geq 1$, $|u_n - \lambda_n| \leq k |u_{n-1} - \lambda_n| \leq k^n |u_0 - \lambda_n|$.

CV linéaire

– On va mq àpcr, $(u_n)_n$ CV quadratiquement.

On utilise la formule de Taylor-reste intégral à l'ordre 2 : $\forall x \geq \lambda_n$, $f(x) = f(\lambda_n) + (x-\lambda_n) f'(\lambda_n) + (x-\lambda_n)^2 \int_0^1 \frac{(1-t)}{1!} f''(\lambda_n + t(x-\lambda_n))\,dt$

$= \lambda_n + 0 + (x-\lambda_n)^2 \int_0^1 (1-t) f''(\lambda_n + (x-\lambda_n)t)\,dt$

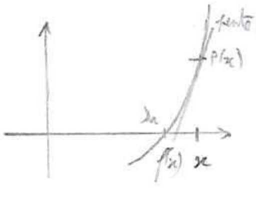
Donc $|f(x) - \lambda_n| \leq |x-\lambda_n|^2 \times 1 \times \sup_{[\lambda_n ; x]} |f''| = |x-\lambda_n|^2 \times M_x$.

– Donc pour $x > \lambda_n$ fixé, et $\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \lambda_n| < \frac{1}{M_x}$, donc $|u_n - \lambda_n| \leq M_x |u_{n-1} - \lambda_n|^2 \leq M_x \left(M_x |u_{n-2} - \lambda_n|^2\right)^2$

$\vdots$

$\leq M_x^{2^{n-n_0}-1} |u_{n_0} - \lambda_n|^{2^{n-n_0}}$

$\leq \frac{1}{M_x} \big(\underbrace{|u_{n_0} - \lambda_n| \times M_x}_{<1} \big)^{2^{n-n_0}}$ $\square$



$f' = 1 - \frac{P'P' - PP''}{(P')^2}$

$f'' = \frac{P''P'P'' + PP'''P' - 2PP''P''}{(P')^3} \xrightarrow[x \to \lambda_n]{} \frac{P''(\lambda_n)}{P'(\lambda_n)}$. Donc $M_x = \frac{P''(\lambda_n)}{P'(\lambda_n)} + o(1)$ pour $x \to \lambda_n$.