Recasages : 103, 104, 105, 108

Références :
Algèbre, Serge Lang

Théo. *Pour* $n \geq 5$, $\mathcal{A}_n$ *est simple.*

Lemme.

(i) Pour $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

(ii) Pour $n \geq 5$ les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$

Démonstration. (i) Vérifions que les 3-cycles sont dans $\mathcal{A}_n$.
$(i\ j\ k) = (i\ j)(k\ l)$ donc la signature d'un 3-cycle est -1.
Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a donc forcément $\sigma = \tau_1 ... \tau_{2k}$, c'est un produit de doubles transpositions.
$(i\ j)(k\ l) = (i\ j)(j\ k)(j\ k)(k\ l) = (i\ j\ k)(j\ k\ l)$

(ii) Soit $(j_1, j_2, j_3, i_1, i_2, i_3) \in [\![1, n]\!]$, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $(j_1\ j_2\ j_3) = \sigma(i_1\ i_2\ i_3)\sigma^{-1}$.

- $\sigma \in \mathcal{A}_n$, alors le résultat est montré.
- Sinon, soit $k, l \neq i_1, i_2, i_3$ alors $\sigma' = \sigma(k\ l) \in \mathcal{A}_n$ et $(j_1\ j_2\ j_3) = \sigma'(i_1\ i_2\ i_3)\sigma'^{-1}$

□

Démonstration. Soit $N \trianglelefteq \mathcal{A}_n \backslash \{Id\}$. Montrons que $N = \mathcal{A}_n$. Si N contient un 3-cycles alors, N contient tous les 3-cycles et s'il contient tous les 3-cycles alors $N = \mathcal{A}_n$. Montrons que N contient un 3-cycle. Soit σ la permutation ayant le plus de points fixes de $N \backslash \{id\}$ (i.e la permutation de support minimal).

1. Montrons que σ n'est pas un produit de ~~transpositions disjointes~~ cycles disjoints.
~~Supposons que σ est un produit de transpositions disjointes. Comme $\sigma \in \mathcal{A}_n$, il y a donc au moins deux transpositions $(i\ j)$ et $(k\ l)$. Soit $m \neq i, j, k, l$, posons $\tau = (k\ l\ m)$ et~~
$$\cancel{\sigma' = \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma^{-1}}_{\in N} \in N}$$
~~Les points fixes de σ, différents de m, sont fixes par σ'. De plus, $\sigma'(j) = j$ et $\sigma'(i) = i$ donc σ' a plus de points fixes que σ~~ ABSURDE.

Ecrivons : $\sigma = a_1 \cdots a_r$. Supposons que $\ell(a_1) \geq 4$. $a_1 = (a_{11} a_{12} \cdots a_{1m})$
Alors pour $\tau = (a_{11} a_{12} a_{13})$, on a $\tau a_1 \tau^{-1} = (a_{12} a_{13} a_{11} a_{14} \cdots a_{1m}) \Rightarrow \tau a_1 \tau^{-1} a_1^{-1} = (a_{11} a_{12} a_{14})$
$\Rightarrow \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma^{-1}}_{\in N} = (a_{11} a_{12} a_{14}) a_2 \cdots a_r \neq id$, ce qui contredit la minimalité de σ.
Donc $\ell(a_i) = 2, 3$ $\forall 1 \leq i \leq r$. Supposons $\ell(a_1) = 2$. On a alors $k \geq 2$ tq $\ell(a_k) = 2$ car $\varepsilon(\sigma) = 1$.
$a_1 = (i\ j)$, $a_k = (k\ l)$. Comme $m \geq 5$, on a $m \neq i, j, k, l$.
Pour $\tau = (k\ l\ m)$, $\underset{\neq id}{\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}} \in N$, fixe i, j, et ne fixe pas m. Elle a donc plus de points fixes que σ, contradiction.

On obtient donc $\sigma = c_1 c_2 ... c_r$ produit de cycles disjoints. de longueur 3.
Posons $c_1 = (i\ j\ k)$, $c_2 = (l\ m\ \tilde{m})$ (si c_2 existe)

2. Montrons que $\sigma = (i\ j\ k)$
Par l'absurde, supposons $\sigma \neq (i\ j\ k)$.
Soit $\tau = (k\ l\ m)$
$$\text{Alors pour } \sigma' = \underbrace{\tau\sigma\tau^{-1}}_{\in N}\underbrace{\sigma^{-1}}_{\in N} \in N,$$
j est un point fixe supplémentaire de σ'. ABSURDE.
et $\sigma' \neq id$
car ne fixe pas i, k, l, m

Donc $\sigma = (i\ j\ k)$, ce qui conclut. □