Exponentielle surjective $M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$

Nurdin, Zavidovique

Théorème :

1) $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est non inj, surjective

2) $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2,\ M \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.

démo :

1) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. — $\exp(2i\pi I_n) = I_n = \exp(0)$. Donc exp non inj. □

On va mq $\exp : (\mathbb{C}[A];+) \to (\mathbb{C}[A]^\times;\times)$ est un morphisme de groupes dont l'image est ouverte et fermée dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

- $\mathbb{C}[A]$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$, fermée car de dim finie.
- $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap Gl_n(\mathbb{C})$, et est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

  $\subset$ ok

  $\supset$ Soit $M = P(A)$, M inversible, M^{-1} est un polynôme en M, donc $M^{-1} = Q(M) = Q(P(A)) \in \mathbb{C}[A]$.

  Donc M a un inverse dans $\mathbb{C}[A]$.

  Et $\mathbb{C}[A] \setminus \mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \det^{-1}(\{0\})$, fermé. Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ ouvert de $\mathbb{C}[A]$. □

- $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^\times$ est bien définie :

  Pour $M \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(M)$ est la limite d'une suite de poly. en M, donc la lim d'une suite de poly en A.

  Comme $\mathbb{C}[A]$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$, $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$. Et $\exp(M) \in Gl_n(\mathbb{C})$, donc $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]^\times$. □

- $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^\times$ est un morphisme de groupes.

  Pour $M, N \in \mathbb{C}[A]$, on a $MN = NM$ car M, N polynômes en A.

  Donc $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$ □

- $\exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.

  On a $D_0 \exp = I_n$. Donc, par le th d'inversion locale, exp est un difféo local en 0, donc exp est ouverte en 0.

  Pour $M, H \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(M+H) = \exp(M)\exp(0+H)$

  Donc $D_M \exp = \exp(M).I_n = \exp(M) \in Gl_n(\mathbb{C})$. Donc exp est un difféo local en M, donc exp est ouverte en M.

  Donc exp est ouverte en tout point de $\mathbb{C}[A]$. Son image est donc un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$. □

- $\exp(\mathbb{C}[A])$ fermé dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

  On a $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M.\exp(\mathbb{C}[A])$:

  $\subset$ $M = M.I_n = M.\exp(0)$.

  $\supset$ Si $M.\exp(N) = \exp(H)$, $M = \exp(H)\exp(-N) \overset{\text{morphisme}}{=} \exp(H-N)$ donc $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$

  Comme $\times$ est continue dans $\mathbb{C}[A]^\times$, $M.\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert, donc $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert comme réunion d'ouverts.

  Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ fermé de $\mathbb{C}[A]^\times$. □

- $\mathbb{C}[A]^\times$ connexe par arcs, donc connexe

  Soient $N, M \in \mathbb{C}[A]^\times$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A]$ et $\det(zM + (1-z)N)$ est un poly de deg n en z. Il a un nb fini de zéros.

  On a un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continu qui relie 0 à 1 en évitant les n racines du polynôme.

Donc $t \mapsto \gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ est un chemin continu reliant N à M dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

$\mathbb{C}[A]^\times$ est donc bien cpa. $\square$

$\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert, fermé, non-vide dans $\mathbb{C}[A]^\times$. Comme $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe, alors $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Donc $\exists P$, poly tq $\exp(P(A)) = A$. $\square$

2) $\subset$ $\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) = \exp\left(\frac{M}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{M}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2$

$\supset$ Soit $A = M^2$, $M \in Gl_n(\mathbb{R})$

Or, $\exists B \in \mathbb{C}[M]$ tq $\exp(B) = M$.

Donc $\exp(B)\exp(\bar{B}) = M \cdot \bar{M} = M^2 = A$

$\exp(B)\exp(\bar{B}) = \exp(B + \bar{B})$ car $B\bar{B} = \bar{B}B$ car $B, \bar{B} \in \mathbb{C}[M]$.

Et $B + \bar{B} \in M_n(\mathbb{R})$, ce qui conclut. $\square$