

Théorème de Grothendieck

Théorème:

Soit $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $1 \leq p < +\infty$, et S un s-er de $L^p(\Omega)$ tq S fermé pour $\|\cdot\|_{L^p}$ et $S \subset L^\infty(\Omega)$.

Alors S est de dim finie.

démon:

Etape 1: soit $i: (S; \|\cdot\|_{L^p}) \hookrightarrow (S; \|\cdot\|_{L^\infty})$ l'injection dans L^∞ . Montrons que le graphe de i est fermé:

Soit $(f_n; i(f_n))$ qui CV vers $(f; g) \in L^p \times L^\infty$. Comme $\nu(\Omega) = 1$, $L^\infty \subset L^1$ et on a: $\|f_n - g\|_{L^1} = \|i(f_n) - g\|_{L^1} \leq \nu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|i(f_n) - g\|_{L^\infty}$

Donc $f_n \xrightarrow{L^1} f$ donc $g = f$, et $f \in S$ car S fermé pour $\|\cdot\|_{L^p}$. donc $(f; g) = (f; i(f))$, ce qui conclut.

car cela montre de plus que S est fermé pour $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Donc $(S; \|\cdot\|_{L^p})$ et $(S; \|\cdot\|_{L^\infty})$ sont des Banach. Comme i est lin cont, on a $M > 0$ tq $\forall f \in S, \|f\|_{L^\infty} \leq M \|f\|_{L^p}$

Etape 2: On se ramène à $L^2(\Omega)$: $\exists \tilde{M} > 0$ tq $\forall f \in S, \|f\|_{L^p} \leq \tilde{M} \|f\|_{L^2}$

Si $p=2$, on a $\|f\|_{L^p} \leq M \|f\|_{L^2}$

Si $1 \leq p < 2$, on a: $\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p d\nu \leq \left(\int |f|^{2p} d\nu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int d\nu\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2}^{2p}$ par Holder

Donc $\|f\|_{L^p} \leq M \|f\|_{L^2} \leq M \|f\|_{L^2}$

Si $2 < p < +\infty$, on a: $\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p d\nu \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2$

$\Rightarrow \|f\|_{L^\infty}^p \leq M^p \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2 \Rightarrow \|f\|_{L^\infty} \leq M^{\frac{2}{p}} \|f\|_{L^2}$

Etape 3:

Soit (f_1, \dots, f_n) famille orthogonale de $S \subset L^2(\Omega)$. Montrons que $\exists \alpha > 0$ tq $n \leq \alpha$.

$\forall c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n, \exists N_c \subset \Omega, \nu(N_c) = 0$ tq $\forall x \in \Omega \setminus N_c, |c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)| \leq \|c_1 f_1 + \dots + c_n f_n\|_{L^\infty}$

Etant $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{c \in \mathbb{Q}^n} N_c$. On a $\nu(\tilde{\Omega}) = 1$.

$\forall x \in \tilde{\Omega}, \forall c \in \mathbb{Q}^n$, on a $|c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)| \leq \|c_1 f_1 + \dots + c_n f_n\|_{L^\infty}$.

Comme les deux termes sont continus en les c_i , on étend le résultat à tout $z \in \mathbb{R}^n$ car \mathbb{Q}^n est dense dans \mathbb{R}^n .

Soit $\alpha \in \tilde{\Omega}$. On pose $\tilde{c} = f(\alpha)$. On a alors $|c_1 f_1(\alpha) + \dots + c_n f_n(\alpha)| = \left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha) \right| \leq \|\sum c_i f_i\|_{L^\infty} \leq \tilde{M} \|\sum c_i f_i\|_{L^2} = \tilde{M} \times \sqrt{\sum c_i^2} = \tilde{M} \times \sqrt{\sum |f_i(\alpha)|^2}$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq \tilde{M}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 d\nu(x) \leq 1 \times \tilde{M}^2$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 d\nu(x) = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = n$$

Pour, les familles orthogonales de S sont de cardinal borné, donc S est de dim. finie $\leq \tilde{M}^2$. \square