AGNIEL Violal

Référence :

# Théorème de Koenigs

**Théorème :**

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom, non bijective, ayant un point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$, avec $\varphi'(\alpha) \neq 0$.

Alors les v.p. de $C_\varphi : \begin{array}{l} Hol(\mathbb{D}) \to Hol(\mathbb{D}) \\ f \mapsto f \circ \varphi \end{array}$ sont les $\varphi'(\alpha)^n$, $\forall n \geq 0$.

Elles sont toutes de multiplicité 1.

**Rappels :**

**Lemme de Schwarz :**

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, holom, tq $f(0) = 0$.

Alors $\forall z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ tq il y a égalité, ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = e^{i\theta} z$, f est une rotation.

**Prop :**

Les biholom de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$ sont exactement les $e^{i\theta}\Psi_\alpha : z \mapsto \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha} z - 1} \times e^{i\theta}$, $\alpha \in \mathbb{D}$, $\theta \in [0; 2\pi[$

(se démontre avec Schwarz)

_ Etape 1 : On se ramène à $\alpha = 0$.

soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, holom, non bij, tq $\varphi(\alpha) = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{D}$.

alors $\Psi_\alpha \circ \varphi \circ \Psi_{-\alpha}$ est holom, non bij, et $\Psi_\alpha \circ \varphi \circ \Psi_{-\alpha}(0) = 0$.

_ Etape 2 : On montre une prop : Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holom, tq $f(0) = 0$. Si f n'est pas une rotation, alors $f_{(n)} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ CV uniformément vers 0 sur tout compact.

**démo :**

Soit K compact de $\mathbb{D}$. $\exists\, 0 < r < 1$ tq $K \subset B(0, r)$.

Comme f pas une rotation, le lemme de Schwarz dit que $|f(z)| < r$ sur $\{|z| = r\}$, donc $M_r = \sup_{\partial B(0,r)} |f| < r$

On pose $\tilde{f}(z) = \frac{1}{M_r} \times f(rz)$. $\tilde{f}$ holom, $\tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\tilde{f}(0) = 0$, et $\tilde{f}$ non bij.

Donc $|\tilde{f}(z)| < |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$ par Schwarz.

Donc $\forall z \in K$, $|f(z)| \leq \left|\frac{M_r}{r}\right| \times |z|$ avec $\frac{M_r}{r} < 1$.

Par récurrence, on a $|f_{(n)}(z)| \leq \left|\frac{M_r}{r}\right|^n \times |z|$, $\forall z \in K$, donc $\|f_{(n)}\|_{L^\infty, K} \leq \left(\frac{M_r}{r}\right)^n \to 0$, donc $f_{(n)} \to 0$ unif sur K. □

démo du théorème :

- Comme $\varphi'(0) \neq 0$, f est non-constante, donc 0 n'est pas une v.p. □
- Soit $\lambda$ une v.p. ~~avec~~ de $C_\varphi$ de v.p. $f$ non-constante. On a $f \circ \varphi = \lambda f$. Alors $\lambda \neq 1$ et $f(0)=0$.

En effet, si $\lambda = 1$, on aurait : $\forall n \geq 1$, $f \circ \varphi_{(n)} = f$, donc $\underbrace{\lim_n \left( f \circ \varphi_{(n)} \right)}_{= f} \underset{\substack{\text{conv unif sur} \\ \text{tout compact}}}{=} f \circ \lim \left( \varphi_{(n)} \right) = f(0)$ car $\varphi_{(n)} \xrightarrow{\text{CV sur tout compact}} 0$

$\Rightarrow$ f constante, contradiction.

Ainsi, $\lambda \neq 1$.

Et on a $\underbrace{f \circ \varphi(0)}_{= f(0)} = \lambda f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$. □

- $\lambda = \varphi'(0)^n$ pour un $n \geq 0$. On a $f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Ainsi, on obtient : $\lambda = \dfrac{f \circ \varphi(z)}{f(z)} = \left( \dfrac{\varphi(z)}{z} \right)^n \times \dfrac{a_n + a_{n+1} \varphi(z) + \dots}{a_n + a_{n+1} z + \dots}$ $\forall z$ tq $f(z) \neq 0$

$$\left( \frac{\varphi(z)}{z} \right)^n \xrightarrow[z \to 0]{} \left( \varphi'(0) \right)^n, \qquad \frac{a_n + a_{n+1} \varphi(z) + \dots}{a_n + a_{n+1} z + \dots} \xrightarrow[z \to 0]{} 1$$

Soit $f$ une fonct propre associée à $\lambda$.

Comme $\varphi'(0) \neq 0$, $\exists r > 0$ tq $\forall z \in B(0,r) \setminus \{0\}$, $\varphi(z) \neq 0$ par le th des zéros isolés.

Donc on peut bien passer à $z \to 0$. □

- La multiplicité de $\lambda$ est 1.

Soit $f$ fonction propre associée à $\lambda$. En dérivant $f \circ \varphi = f$ et en évaluant en $z = 0$, on voit que $f^{(n)}(0)$ dépend de $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ et de $\left( \varphi^{(m)}(0) \right)_m$. Par récurrence sur $n \geq 2$, comme $f(0) = 0$ et $\left( \varphi^{(m)}(0) \right)_m$ sont connus, $f^{(n)}(0)$ ne dépend que de $f'(0)$.

Comme $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ $\forall z \in \mathbb{D}$, $f$ ne dépend que de $f'(0)$.

Donc pour $f, g$ fonct propres de v.p. $\lambda$, tq $f'(0) = g'(0)$, on a $f = g$. □

- $\exists \sigma \in Hol(\mathbb{D})$ tq $\sigma \circ \varphi = \varphi'(0) \times \sigma$.

Soit $\lambda = \varphi'(0)$. Par le lemme de Schwarz, $|\varphi'(0)| < 1$.

On définit $\sigma_n = \lambda^{-n} \varphi_{(n)}$. Ainsi, $\sigma_n \circ \varphi = \lambda \sigma_{n+1}$. On a : $\sigma_n(z) = z \times \dfrac{\varphi(z)}{\lambda z} \times \dfrac{\varphi_{(2)}(z)}{\lambda \varphi(z)} \times \dots \times \dfrac{\varphi_{(n)}(z)}{\lambda \varphi_{(n-1)}(z)} = z \times \prod_{i=0}^{n-1} F\left( \varphi_{(i)}(z) \right)$

où $F(w) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(w)}{\lambda w} \\ \dfrac{\varphi'(0)}{\lambda} & w = 0 \end{cases}$

Montrons que $\prod_{i \geq 0} F\left( \varphi_{(i)}(z) \right)$ CV unif sur tout compact.

On a $\|F\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|\lambda|}$. Donc $\|1 - F\|_{L^\infty} \leq 1 + \frac{1}{\lambda} := A$

Et $F(0) = \dfrac{\varphi'(0)}{\lambda} = 1$. Ainsi, $\dfrac{|1 - F(z)|}{A} \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Soit $0 < r < 1$. On sait que $|\varphi_{(n)}(z)| \leq \left( \frac{M_r}{r} \right)^n |z|$, $\frac{M_r}{r} < 1$.

Ainsi, $|1 - F(\varphi_{(n)}(z))| \leq A |\varphi_{(n)}(z)| \leq A \times \left( \frac{M_r}{r} \right)^n |z|$.

Donc $\sum_{i \geq 0} |1 - F(\varphi_{(i)}(z))|$ CV unif sur $\bar{B}(0, \frac{r}{2})$, donc sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Donc $\prod_{i \geq 0} F(\varphi_{(i)}(z))$ est bien défini et est holom d'après le th de Weierstrass.

On a ainsi $\sigma \in Hol(\mathbb{D})$ tq $\sigma \circ \varphi = \varphi'(0) \sigma$. □