Def : $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff \forall \varphi \in C_b^0, E[\varphi(X_n)] \to E[\varphi(X)]$

Théorème de Lévy + TCL

Ref : [ZQ (incomplet)]

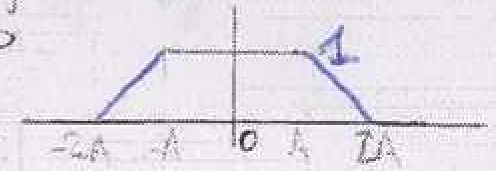
Théorème (admis) : (voir à la fin)
soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{-iyx} dy$

D .

Prop
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall f \in C_0, E(f(X_n)) \to E(f(X))$

Dém $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ donc $\forall f \in C_b^0$, $E(f(X_n)) \to E(f(X))$
Donc, $\forall f \in C_0$,

$\Leftarrow$ Soit $f \in C_b^0$, $\varepsilon > 0$
Soit φ



$\int (1-\varphi) dP_X \leq P_X(x, |x| \geq A) \leq \varepsilon$ pour A bien choisi

$\int f dP_{X_n} - \int f dP_X = \underbrace{\int f(1-\varphi) dP_{X_n}}_{A_n} + \underbrace{\left(\int f\varphi dP_{X_n} - \int f\varphi dP_X\right)}_{B_n} + \underbrace{\int f(1-\varphi) dP_X}_{C_n}$

$|A_n| \leq \|f\|_\infty \int (1-\varphi) dP_{X_n} \leq \|f\|_\infty (1 - \int \varphi dP_{X_n}) \leq \|f\|_\infty (1 - \int \varphi dP_X) + \varepsilon$ pour n assez grand
$\leq \|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon$

. $f\varphi \in C_0$ donc $B_n \to 0$.
. $|C_n| \leq \|f\|_\infty \varepsilon$.
Donc $\int f P_{X_n} \to \int f dP_X$. OK.

Pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\widehat{f'}(x) \overset{\text{IPP}}{=} (ix) \hat{f}(x) \Rightarrow \widehat{f''}(x) = -x^2 \hat{f}(x)$

Donc $\hat{f} \in L^1$, donc $f \in \mathrm{Im}(\mathcal{F})$, donc $C_c^\infty \subset \mathrm{Im}(\mathcal{F})$, et $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.

Changements par Vidal AGNIEL

Théorème :
~~(X_n) i.i.d~~
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \phi_{X_n} \to \phi_X$.

Dém $\Rightarrow$ $x \mapsto e^{itx} \in C_b^0$ donc $E(e^{itX_n}) \to E(e^{itX})$ $\forall t$.
Donc $\phi_{X_n} \to \phi_X$.

$\Leftarrow$ Soit $f \in \mathrm{Im}\,\mathcal{F}$.
$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t) dt$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

$E(f(X_n)) = E\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n} \varphi(t) dt\right) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) E(e^{itX_n}) dt$

$\xrightarrow{\text{TCD}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) E(e^{itX}) dt$

$\overset{\text{Fubini}}{=} E\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{itX} dt\right)$

$= E(f(X))$.

Maintenant, soit $f \in C_0(\mathbb{R})$, et soit $g \in \mathrm{Im}\,\mathcal{F}$ tq $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.
$E(f(X_n)) - E(f(X)) = E(f(X_n) - f(X))$
$= E(f(X_n) - g(X_n)) + E(g(X_n) - g(X)) + E(g(X) - f(X))$
$|E(f(X_n)) - E(f(X))| \leq \underbrace{E(|f-g|(X_n))}_{\leq \|f-g\|_\infty} + \underbrace{|E(g(X_n)) - E(g(X))|}_{\to 0} + \underbrace{E(|g-f|(X))}_{\leq \|f-g\|_\infty}$

Donc $E(f(X_n)) \to E(f(X))$ $\blacksquare$

Théorème (TCL) :
(X_n) suite de v.a i.i.d de carré intégrable, moyenne m, variance σ^2.
Alors $\frac{(X_1 + \dots + X_n - nm)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Dém. quitte à changer X en $\frac{X-m}{\sigma}$, on suppose $m = 0$, $\sigma = 1$.
Il suffit de mq $\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \to \phi_{\mathcal{N}(0,1)}$.

attention traiter le cas constant à part $\sigma = 0$.

Comme $X \in L^2$, $\phi_X \in C^2$

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_k e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\right) = \prod\left(\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k}\right)\right)$$

$$= \prod_k \phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{DL^2}{=} \left(\phi_X(0) + \phi_X'(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\phi_X''(0)}{2}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 + \mathbb{E}(X)\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{V(X)}{2}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

En effet, si $y_n \to y$, $\left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^y$ $(*)$.

Dans notre cas, $\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + o(1)}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$.

<u>Preuve de $(*)$:</u> [ZQ 563]

$y \in \mathbb{C}$

$$e^y - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{y^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right) y^k := \sum a_{n,k} y^k$$

$$1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \geq 0. \quad \text{Donc } a_{n,k} \geq 0.$$

(dispensable)

Donc $\left|e^y - \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} |y|^k$ Notons $r = |y|$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} r^k = e^r - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r - e^{n\ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

$$\leq e^r - e^{n\left(\frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2}\right)} = e^r\left(1 - e^{-\frac{r^2}{2n}}\right) \leq \frac{r^2}{2n}e^r$$

Donc $\left|e^y - \left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n\right| \leq \left|e^y - e^{y_n}\right| + \left|e^{y_n} - \left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n\right|$

$$\leq \left|e^y - e^{y_n}\right| + \frac{|y_n|^2}{2n}e^{|y_n|} \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

cas réel : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = e^{x - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{x^2}{n}\right)}$

nouvelle ligne $= e^x \times e^{-\frac{x^2}{n}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x$

cas $\mathbb{R}$, algèbre de Banach : $e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_k \underset{\geq 0}{a_{n,k}} z^k$ et $\sum a_{n,k} |z|^k = e^{|z|} - \left(1 - \frac{|z|}{n}\right)^n \to 0$

<u>Supplément</u> idée de démo de la formule d'inversion de Fourier.

- Soit on montre que C_c^∞ est dense dans C_0 (fct qui tendent vers 0) par troncature et régulation, puis on montre la formule d'inversion pour C_c^∞. Ça nous permet de dire que $C_c^\infty \subset \operatorname{Im} \mathcal{F}$ et donc que $\operatorname{Im} \mathcal{F}$ dense dans C_0.
  Pour montrer la formule d'inversion sur C_c^∞ on mq si $f \in C_c^\infty$ alors $\hat{f}$ est L^1 (en dérivant on fait sortir des puissances et ça mq $\hat{f}$ est L^1).
  On montre alors que : f L^1 et $\hat{f}$ L^1 $\Rightarrow$ f vérifie l'inversion (Wikipedia par ex).
- Sinon on mq $C_c^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$; que la TF est une bij sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (formule d'inversion, voir Faraut) donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Im} \mathcal{F}$, donc $C_c^\infty \subset \operatorname{Im} \mathcal{F}$ donc $\operatorname{Im} \mathcal{F}$ dense ds C_0.
- Sinon, on peut compactifier $\mathbb{R}$ et utiliser SW

Voir post "image de la transformée de Fourier" sur les maths net, Mai-Juin 2010.