

FEUILLE DE TD

Applications linéaires, Décomposition de Dunford
algorithmique

■ Déterminant ■

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les mineurs $\Delta_{2,2}$ et $\Delta_{1,3}$.

Calculer $\det(A)$ en effectuant un développement selon la première ligne.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$.

• On définit l'endomorphisme $f : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X.P'(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Calculer $\det(f)$.

• On définit l'endomorphisme $g : P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Calculer $\det(g)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $A_n = (i+j)_{(i,j)}$.

• Calculer $\det(A_2)$, $\det(A_3)$.

• Montrer que A_n n'est pas inversible pour tout $n \geq 3$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. Soit $A_n = (\max(i, j))_{(i,j)}$.

• Calculer $\det(A_2)$ et $\det(A_3)$.

• Calculer $\det(A_n)$.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathcal{S}_n$.

On définit la matrice $A_\tau \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $a_{i,j} = \delta_{i,\tau(j)}$.

Montrer que $\det(A_\tau) = \varepsilon(\tau)$.

Exercice 8. Soit E un e.v. de dimension n , $n \geq 1$. Soit $s : E \rightarrow E$ une symétrie.

• Exprimer $\det(s)$ en fonction de $\dim(\text{Ker}(s - Id))$ ou $\dim(\text{Ker}(s + Id))$.

• Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'endomorphisme f par $f(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = a_n + a_{n-1}X + \dots + a_0X^n$.

Calculer $\det(f)$.

• Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'endomorphisme g par $g(A) = {}^t(A)$.

Calculer $\det(g)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ à coefficients entiers.

• Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

• On suppose que A est inversible et que A^{-1} est à coefficients entiers.

Montrer que $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Calculer $\det(A_3)$ et $\det(A_4)$.

• En déduire $\det(A_n)$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.

• Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, que peut-on dire sur $\text{Ker}(\lambda I_3 - A)$?

• En déduire $\text{Spec}(A)$.

On calcule :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -2\lambda \\ 2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I_3 - A) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}} \lambda \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & 0 \\ 5 & \lambda - 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot 1 \cdot 1 \cdot ((\lambda + 2)(\lambda - 2) + 10) = \lambda(\lambda^2 - 4 + 10)$$

Donc, on a $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ si et seulement si $\lambda(\lambda^2 - 6) = 0$. Les solutions sont $0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$.

- Si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$, on sait alors que la matrice $\lambda I_3 - A$ n'est pas inversible. Or, une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si elle n'est pas injective. Donc, on a $\text{Ker}(\lambda I_3 - A) \neq \{0\}$. Ainsi, les solutions de l'équation sont des valeurs propres pour A .
- Réciproquement, si λ est une valeur propre pour A , alors $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, et donc $\det(\lambda I_3 - A) = 0$. Ainsi, $\text{Spec}(A) = \{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$).

- On suppose que n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
- Si n est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

• On a $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Si n est impair, on obtient donc $\det(A) = -\det(A)$, donc $2 \det(A) = 0$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.

• Si n est pair, $n = 2k$, la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et inversible.

Son déterminant est donc non-nul. (d'après le TD 2, on a $\det(A) = (-1)^k \det(I_k) \det(-I_k) = (-1)^k \cdot (-1)^k = 1$)

Exercice 13. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

— En développant selon la première ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc.$$

— On cherche à se ramener à un déterminant de Vandermonde. On commence par effectuer $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Puis, on effectue $C_1 \leftarrow C_2 + C_3$. Cela donne :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}.$$

On peut alors factoriser C_1 par 2 et effectuer $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, pour obtenir :

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

On peut se ramener ainsi à un déterminant de Vandermonde :

$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a).$$

■ Éléments propres d'un endomorphisme ■

Exercice 14. Soit $n \geq 1$. On définit : $A_n = (1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Calculer $\det(A_n - \lambda I_n)$, puis $\det(A_n - \lambda I_n)$.
- En déduire $\text{Spec}(A_n)$.
- Pour $\lambda \in \text{Spec}(A_n)$, déterminer $E_\lambda(A_n)$.

• On calcule :

$$\det(A_n - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & & n-\lambda \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & n-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_n \leftarrow C_n + C_{n-1} + \dots + C_1} = (n-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L_i \leftarrow L_i - L_n \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad (n-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-\lambda) \cdot (-1)^{2n} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - n)$$

• On a vu dans d'autres exercices que $\lambda \in \text{Spec}(A_n)$ si et seulement si $\det(A_n - \lambda I_n) = 0$. Donc, $\text{Spec}(A_n) = \{0, n\}$.

• Détermination de $E_0(A_n)$. On remarque que la matrice A_n est de rang 1, donc $E_0(A_n) = \text{Ker}(A_n)$ est de dimension $n-1$.

Pour (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , on remarque que $e_2 - e_1, \dots, e_n - e_{n-1}$ sont des vecteurs de $\text{Ker}(A_n)$. Cette famille est de plus libre, donc $E_0(A_n) = \text{Vect } e_2 - e_1, \dots, e_n - e_{n-1}$.

Détermination de $E_n(A_n)$. Soit X un vecteur propre de A_n de valeur propre n . On a alors $A_n X = nX$. On obtient donc : $x_1 + \dots + x_n = n x_i$, pour $1 \leq i \leq n$.

On montre alors que $A_n X = nX$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, si et seulement si $X \in \text{Vect } e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Donc, $E_n(A_n) = \text{Vect } e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

Exercice 15.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme 1 $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.
2. Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B)$.

-
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouvons une suite $(A_m) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A . On définit la fonction

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n).$$

Cette fonction est un polynôme en x de degré n . Donc elle s'annule en au plus n points. Ainsi, $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}, p(x) \neq 0$, c'est-à-dire que $A + xI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $N > \frac{1}{\epsilon}$. Alors, $\forall m > N$ on a $\frac{1}{m} < \epsilon$, donc $A_m = A + \frac{1}{m}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus (A_m) , converge vers A pour la norme 1, ce qui conclut.

2. On a A et B inversibles, donc AB est inversible. En regardant leurs inverses, on obtient :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} {}^t \text{com}(AB) = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^t \text{com}(B) \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A).$$

En passant à nouveau à la transposée, on obtient :

$$\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B).$$

3. Ici, A et B ne sont pas forcément inversibles. D'après la première question, pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p}I_n \quad \text{et} \quad B + \frac{1}{p}I_n$$

sont inversibles. On a donc

$$\text{com}\left(\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\right) = \text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right) \text{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right).$$

Or, pour M une matrice, les coefficients de $\text{com}(M)$ sont des polynômes en les $m_{i,j}$ de degré au plus $n-1$. Les coefficients de $\text{com}(M)$ sont donc des fonctions continues en les $m_{i,j}$. Comme les coefficients de $A + \frac{1}{p}I_n$ convergent vers les coefficients de A quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient donc que les coefficients de $\text{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$ convergent vers les coefficients de $\text{com}(A)$, par continuité. (Cela fait une convergence pour la norme 1 des matrices)

Ainsi, on peut passer à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, ce qui donne :

$$\text{com}(AB) = \text{com}(A) \text{com}(B).$$

Exercice 16.

1. Montrer que la famille de polynômes

$$(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2)$$

est liée.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Montrer que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

-
1. Ces 4 polynômes sont dans $\mathbb{C}_3[X]$, qui est de dimension 3. Cette famille est donc forcément liée.

2. D'après (1), $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x+1)^2 + \lambda_3(x+2)^2 + \lambda_4(x+3)^2 = 0.$$

Pour $x = a, b, c$ puis d , cela donne :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \\ d^2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} (a+1)^2 \\ (b+1)^2 \\ (c+1)^2 \\ (d+1)^2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} (a+2)^2 \\ (b+2)^2 \\ (c+2)^2 \\ (d+2)^2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} (a+3)^2 \\ (b+3)^2 \\ (c+3)^2 \\ (d+3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible car ses vecteurs colonne forment une famille liée. Donc $D = \det {}^t M = \det M = 0$.

Exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.
Montrer que $2^{n-1} \mid \det A$.

Soit $2 \leq i \leq n$. En effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + C_1$, les coefficients de la colonne C_i sont alors à valeurs dans $\{-2, 0, 2\}$. On peut alors factoriser tous ces coefficients par 2 et obtenir une colonne à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

En effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + C_1$ pour tout $2 \leq i \leq n$, les colonnes C_2, \dots, C_n auront toutes des coefficients dans $\{-2, 0, 2\}$, et seront toutes factorisables par 2.

On obtient donc $\det(A) = 2^{n-1} \det(B)$, où B est une matrice dont les coefficients sont dans $\{-1, 0, 1\}$. Comme A et B sont à coefficients entiers, leurs déterminants sont des entiers. D'où $2^{n-1} \mid \det(A)$.

Exercice 18. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 - \alpha & \alpha - 5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha - 2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer χ_A et $\text{Spec}(A)$.

Remarque : Calculer $\chi_A(X)$ et le factoriser nous donne $\text{Spec}(A)$. A l'opposé, trouver des vecteurs propres "simples" pour A et leurs valeurs propres associées donne de l'information

que $\chi_A(X)$.

De même, $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$ permettent de déduire certaines racines de χ_A .

Le but de tous ces résultats est d'avoir une méthode assez générale qui permet de calculer ce que l'on désire, et plein de petites techniques rapides qui permettent d'obtenir le résultat plus rapidement.

• On peut commencer par tester si des vecteurs comme $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$, ... sont des vecteurs propres.

On remarque que pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $Au = -2u$ et $Av = 3v$.

Ainsi, on a $\{-2, 3\} \subset \text{Spec}(A)$, et $(X+2)(X-3) \mid \chi_A(X)$.

Comme $\chi_A(X)$ est unitaire et de degré 3, on a $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)(X-b)$.

On a alors $2 - 3 - b = \text{Tr}(A) = -4$. On en déduit que $b = 3$, c'est-à-dire $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)^2$.

On en déduit aussi que $\text{Spec}(A) = \{-2, 3\}$.

Autre résolution par un calcul de déterminant : On calcule :

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3+\alpha & 5-\alpha & -\alpha \\ \alpha & X+2-\alpha & -\alpha \\ -5 & 5 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X+2 & 5-\alpha & -\alpha \\ X+2 & X+2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 5 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X) \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X+2) \begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -\alpha \\ 0 & X-3 & 0 \\ 0 & 5 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} X-3 & 0 \\ 5 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)^2(X-3).$$

On retrouve ainsi $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)^2$ et $\text{Spec}(A) = \{-2, 3\}$.

Exercice 19. Soient n un entier naturel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$f(P(X)) = (X^2 - 1)P''(X) + (2X + 1)P'(X).$$

1. Calculer $\chi_f(X)$ et $\text{Spec}(f)$.
2. Déterminer le noyau de f .
3. On se place dans le cas où $n = 2$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f .

-
1. Dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on a : $f(X^0) = 0$, $f(X^1) = 2X + 1$ et, $f(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$, $\forall 2 \leq k \leq n$. Pour A la matrice de

f dans la base canonique, on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & \\ 0 & 2 & 2 & & * \\ 0 & 0 & 2 \times 3 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice A est triangulaire supérieure, on en déduit que $\chi_f(X) = \chi_A(X) = \prod_{k=0}^n (X - k(k+1))$. Le spectre de A est donc $\text{Spec}(A) = \{0, 2, 2 \times 3, \dots, n(n+1)\}$. La matrice A est de taille $n+1$ et elle possède $n+1$ valeurs propres distinctes.

- D'une part, on a $f(1) = 0$, d'où $X^0 \in \text{Ker}(f)$.
D'autre part, pour $k \geq 1$ on a $\deg(f(X^k)) = k$. Donc, pour tout polynôme P de degré 1 ou plus, on a $\deg(f(P)) = \deg(P) > 0$. On en déduit donc que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1)$, le sous-e.v. des polynômes constants.
- Quand $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $\text{Spec}(A) = \{0, 2, 6\}$.

On va utiliser la forme triangulaire supérieure de A pour trouver des vecteurs propres associés à chacune de ses valeurs propres (0, 2 et 6).

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On a $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = 2e_2 + e_1$ et $Ae_3 = 6e_3 + 2e_2 - 2e_1$.

Ainsi, pour $X_1 = e_1$, on a $AX_1 = 0$.

Ensuite, pour $X_2 = e_2 + \frac{1}{2}e_1$, on remarque que l'on a $AX_2 = 2e_2 + e_1 + 0 = 2X_2$.

En posant $X_3 = e_3 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{4}e_1$, on obtient $AX_3 = 6e_3 + 3e_2 - \frac{3}{2}e_1 = 6X_3$.

Comme un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ représente le polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que la famille $(1, 1 + 2X, 1 - 2X - 4X^2)$ est une famille de vecteurs propres pour f . Les polynômes de cette famille ayant tous des degrés différents, cette famille est libre, et possède 3 polynômes. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 20. Soient u, v deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

- Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que :
Si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.
- On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question est encore vraie pour $\lambda = 0$.
- On prend maintenant $E = \mathbb{R}[X]$.
On pose $u(P) = P'$ l'endomorphisme de dérivation, et v l'endomorphisme de primitivation ($v(1) = X$ et $v(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$).
Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

- Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Il existe un vecteur $x \in E$ non-nul tel que $u(v(x)) = \lambda x$.
D'où : $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$ car $u(v(x)) \neq 0$. Donc λ est une valeur propre de $v \circ u$.
- On suppose que E est de dimension finie. Si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det(v \circ u)$. D'où $\det(v \circ u) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de $v \circ u$.
- Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $u \circ v(P)(X) = P(X)$ et $v \circ u(P)(X) = P(X) - P(0)$.
Ainsi, on a : $\text{Ker}(u \circ v) = \{0\}$ et $\text{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$.
0 est donc une valeur propre de $v \circ u$, mais pas de $u \circ v$.
Donc, le résultat de la question précédente est faux en général en dimension infinie.

Exercice 21. 1. Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme caractéristique de J .
- En déduire les valeurs propres complexes de la matrice J .
(On notera j le nombre complexe $e^{i2\pi/3}$.)
- Déterminer une base B de \mathbb{C}^3 formée de vecteurs propres de J .
- Pour $f : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto J.X \in \mathbb{C}^3$, donner l'écriture de $\text{Mat}_B(f)$.

2. Pour tout vecteur (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , on définit la matrice

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

- Montrer que la matrice $A(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de I_3 , J et J^2 .
- En déduire que tout vecteur propre de J est aussi un vecteur propre de $A(x, y, z)$.
- Que valent $\text{Spec}(A(x, y, z))$ et $\chi_{A(x, y, z)}$?
- Montrer que toutes les valeurs propres de $A(x, y, z)$ sont réelles.

1. (a) Le polynôme caractéristique de la matrice J est

$$\det(XI_3 - J) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 1.$$

- (b) Les valeurs propres complexes de la matrice J sont les trois racines cubiques de l'unité : $1, j$ et j^2 .

- (c) Trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres $1, j$ et j^2 sont respectivement :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs forment bien une base de \mathbb{C}^3 car le déterminant $\det(V_1, V_2, V_3)$ n'est pas nul.

- (d) Par définition de f , on a $f(V_0) = V_0$, $f(V_1) = jV_1$, et $f(V_2) = j^2V_2$. Ainsi, la matrice de f dans la base $B = (V_0, V_1, V_2)$ est diagonale : $\text{Mat}_B(f) = \text{Diag}(1, j, j^2)$.

2. (a) La matrice J^2 s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $A(x, y, z) = xI_3 + yJ + zJ^2$.

- (b) Soit V un vecteur propre de J pour la valeur propre $\lambda : J \cdot V = \lambda \cdot V$. On a alors $J^2 \cdot V = \lambda^2 \cdot V$, d'où

$$A(x, y, z) \cdot V = xI_3 \cdot V + yJ \cdot V + zJ^2 \cdot V = x \cdot V + y\lambda \cdot V + z\lambda^2 \cdot V = (x + \lambda y + \lambda^2 z) \cdot V.$$

Donc V est aussi un vecteur propre de la matrice $A(x, y, z)$ pour la valeur propre $x + \lambda y + \lambda^2 z$.

- (c) En posant $g : X \in \mathbb{C}^3 \mapsto A(x, y, z)X$, on a alors $g = x \cdot \text{Id} + y \cdot f + z \cdot f^2$. Donc, d'après une question précédente, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(g) &= x \cdot \text{Mat}_B(\text{Id}) + y \cdot \text{Mat}_B(f) + z \cdot \text{Mat}_B(f^2) \\ &= x \cdot I_3 + y \cdot \text{Diag}(1, j, j^2) + z \cdot \text{Diag}(1, j, j^2)^2 \\ &= \text{Diag}(x + y + z, x + jy + j^2z, x + j^2y + jz). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\chi_{A(x, y, z)}(X) = \chi_g(X) = (X - (x + y + z))(X - (x + jy + j^2z))(X - (x + j^2y + jz))$$

et que $\text{Spec}(A(x, y, z)) = \{x + y + z, x + jy + j^2z, x + j^2y + jz\}$.

- (d) Si $y = z$, alors les valeurs propres de A sont (en utilisant $1 + j + j^2 = 0$) :

$$x + 2y, \quad x + jy + j^2z = x + y(j + j^2) = x - y \quad \text{et} \quad x + jz + j^2y = x - y.$$

Elles sont toutes réelles.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Spec}(A)$, χ_A , et les sous-espaces $E_\lambda(A)$.

Trouver un vecteur $X \in \mathbb{K}^2$ tel que $S_u(X) = \mathbb{K}^2$.

On remarque que la somme des vecteurs colonne de A est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi,

pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $Au = 3u$. u est un vecteur propre de A et 3 est une valeur propre de A .

On a $\text{Tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 4 - 1 = 3$. Les valeurs propres de A sont donc 3 et 1 .

On en déduit donc que $\chi_A(X) = (X - 1)(X - 3) = X^2 - 4X + 3$.

On a ainsi $m_A(3) = 1 = m_A(1)$. Comme on a $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_A(\lambda)$, on en déduit donc que les sous-espaces propres $E_3(A)$ et $E_1(A)$ sont de dimension 1.

Ainsi, $E_3(A) = \text{Vect}(u)$.

Cherchons un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 afin de déterminer $E_1(A)$.

Un test rapide de certains vecteurs montre que pour $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on a $Av = v$.

Ainsi, $E_1(A) = \text{Vect}(v)$.

Pour $X \in \mathbb{K}^2$ un vecteur non-nul, le sous-espace cyclique $S_A(X)$ est de dimension 1 ou 2. S'il est de dimension 1, cela veut dire que X est un vecteur propre de A .

Or, on connaît tous les vecteurs propres de A . En prenant par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, X n'est pas un vecteur propre de A , $S_A(X)$ est donc de dimension 2. On a ainsi $S_A(X) = \mathbb{K}^2$.

Remarque : Dans cet exercice, on peut utiliser toutes les méthodes "générales" vues en cours pour déterminer les quantités demandées (polynôme caractéristique, puis spectre, puis sous-espaces propres,...).

Mais le cours contient beaucoup de petites propriétés qui permettent d'aller plus vite et de faire moins de calculs (trouver des vecteurs propres "simples", raisonnements sur la dimension de $E_\lambda(A)$, raisonnements avec $\det(A)$ et $\text{Tr}(A)$, raisonnements sur le degré de χ_A , raisonnements sur la dimension de $S_A(X)$,...). Cette correction utilise principalement cela.

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

- Déterminer $\chi_A(X)$ et $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A , déterminer $E_\lambda(A)$.
- Trouver des vecteurs X tels que $\dim(S_A(X)) = 2$ et 4 .

• La matrice A est une matrice de permutation. C'est la matrice associée à la permutation $\sigma = (1, 2, 3, 4)$. Cette matrice est de trace nulle, et son déterminant vaut $\epsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$. On calcule $\det(XI_4 - A)$ en effectuant un développement selon la première colonne. On obtient alors que $\chi_A(X) = \det(XI_4 - A) = X^4 - 1$.

Ainsi, on a $\chi_A(X) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.

On a donc $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{-1, 1, r, -r\}$ s'il existe un nombre $r \in \mathbb{K}$ tel que $r^2 = -1$, et $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(A) = \{-1, 1\}$ sinon.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . On a donc $\lambda = 1$ ou -1 . Comme $\mu_1(A) = 1 = \mu_{-1}(A)$, les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

On remarque que la somme des colonnes de A est un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales. Ainsi, pour $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AX_1 = X_1$.

Comme A est la matrice de permutation associée à $\sigma = (1, 2, 3, 4)$, en prenant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

on obtient que $AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_2$.

On a donc $E_1(A) = \text{Vect}(X_1)$ et $E_2(A) = \text{Vect}(X_2)$.

• En utilisant à nouveau les propriétés de A , on peut remarquer que pour $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

- La famille $(Y_1, A(Y_1))$ est libre et $A^2(Y_1) = -Y_1$. Donc $S_A(Y_1)$ est de dimension 2.

- La famille $(Y_2, A(Y_2), A^2(Y_2), A^3(Y_2))$ est la base canonique de \mathbb{K}^4 , donc $S_A(Y_2) = \mathbb{K}^4$, de dimension 4.

Exercice 24. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

• La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

La matrice B est diagonale par blocs. Pour $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $B = \text{Diag}(C, -C)$.

Ainsi, on a $\chi_B(X) = \chi_C(X)\chi_{-C}(X) = (X^2 + 0 + 1)(X^2 + 0 + 1) = (X^2 + 1)^2$.

Pour F un sous-espace stable par B , on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur F est de degré $\dim(F)$ et divise χ_B .

- Si le corps \mathbb{K} possède un nombre r tel que $r^2 = -1$ (par exemple \mathbb{C} ou $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), on a alors $\chi_B(X) = (X - r)^2(X + r)^2$. Dans ce cas χ_B possède des diviseurs de degré 3.

Dans un tel corps, le polynôme caractéristique de la matrice C est $(X - r)(X + r)$. Ainsi, les matrices C et $-C$ possèdent des vecteurs propres pour les valeurs propres r et $-r$.

En prenant $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de C , F est alors

un sous-espace stable par B de dimension 3.

- Si dans le corps \mathbb{K} le nombre -1 n'est pas un carré (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{Q}), alors χ_B ne possède que des diviseurs de degré 0, 2 et 4. La matrice B ne possède ainsi pas de sous-espaces stables de dimension 3.

Exercice 25. Soit E un \mathbb{K} -ev. Soient f, p deux endomorphismes de E , avec p une projection.

Montrer que l'on a $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

Si f commute avec p , alors $\text{Ker}(p) = E_0(p)$ et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id_E) = E_1(p)$ sont stables par f .

Réciproquement, on suppose que ces deux sous-espaces sont stables par f . Soit $x \in E$.

On a $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \text{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$.

On obtient alors $f(p(x)) \in \text{Im}(p)$ et $f(x - p(x)) \in \text{Ker}(p)$, ce qui donne :

$$p(f(x)) = p(f(p(x)) + f(x - p(x))) = p(f(p(x))) + p(f(x - p(x))) = f(p(x)) + 0 = f(p(x)).$$

On en déduit donc que $p \circ f = f \circ p$.

Autre méthode : Les sous-espaces $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f et par p . On a $p_{\text{Im}(p)} = Id_{\text{Im}(p)}$ et $p_{\text{Ker}(p)} = 0_{\text{Ker}(p)}$. Donc, f commute avec p sur ces deux sous-espaces, c'est-à-dire que $f \circ p$ est égal à $p \circ f$ sur $\text{Im}(p)$ et sur $\text{Ker}(p)$.

Comme $f \circ p$ et $p \circ f$ sont des applications linéaires, cette égalité reste vraie sur $\text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.

Comme on a $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, on obtient le résultat.

Exercice 26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non-nulle telle que $Im(A)$ et $Ker(A)$ sont supplémentaires.

1. Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A' \in GL_r(\mathbb{K})$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace "Im(A) et Ker(A) sont supplémentaires" par " $rg(A) = rg(A^2)$ " ?

1. On note f l'application linéaire $X \mapsto AX$ sur \mathbb{K}^n . D'après les propriétés de A , les sous-espaces $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{K}^n .
Or, ces sous-espaces sont stables par f . Ainsi, en prenant une base B adaptée à la somme directe $\mathbb{K}^n = Im(f) \oplus Ker(f)$, la matrice de f dans la base B est diagonale par blocs. Comme on a aussi $f_{Ker(f)} = 0$, on obtient :

$$\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, pour $r = \dim(Im(f)) = rg(f) = rg(A)$.

Ainsi, la matrice A est semblable à cette matrice.

Comme le rang est un invariant de similitude, la matrice $\text{Mat}(f, B)$ est de rang $rg(A)$.

Cela veut dire que $rg(A') = rg(A) = r$.

La matrice A' étant dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, elle est donc inversible. On a obtenu la forme voulue.

2. La réponse est oui : les conditions "Im(A) et Ker(A) sont supplémentaires" et " $rg(A) = rg(A^2)$ " sont équivalentes.
En effet, l'application linéaire $g : X \in Im(A) \mapsto AX \in Im(A)$ a pour noyau $Ker(g) = Im(A) \cap Ker(A)$, et a pour image $Im(g) = A(Im(A)) = A(A\mathbb{K}^n) = A^2(\mathbb{K}^n) = Im(A^2)$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^2))$ si et seulement si $\dim(Im(A) \cap Ker(A)) = 0$. Comme $\dim(Im(A)) + \dim(Ker(A)) = n$ (d'après le théorème du rang), on en déduit que $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^2))$ si et seulement si $Im(A)$ et $Ker(A)$ sont supplémentaires dans \mathbb{K}^n .

Exercice 27. Soient $A \in GL(n)\mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable.

Montrer que BA est diagonalisable.

Comme A est inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$, donc BA et AB sont semblables.

Ainsi, en utilisant des invariants de similitude, on trouve que $\text{Spec}(BA) = \text{Spec}(AB) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, et que $\dim(E_{\lambda_i}(BA)) = \dim(E_{\lambda_i}(AB))$.

On en déduit donc que :

$$\sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(BA)) = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(AB)) = n,$$

Donc la matrice BA est diagonalisable.

Autre preuve : Comme AB est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}ABP = D$.

On a alors :

$$P^{-1}A(BA)A^{-1}P = (PA^{-1})^{-1}(BA)(PA^{-1}) = P^{-1}ABP = D,$$

donc la matrice BA est semblable à une matrice diagonale.

Ainsi, la matrice BA est diagonalisable.

Exercice 28. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. On a $Tr(A) = 0$. On remarque un vecteur propre facile : pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $Au = u$.

On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$. Avec le vecteur propre u , on commence par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_3$ afin de factoriser $(X+1)$ dans le calcul du déterminant. On obtient $\chi_A(X) = (X-1)(X^2 + X - 12)$.

Après factorisation, cela donne $\chi_A(X) = (X-1)(X+4)(X-3)$.

Le spectre de A est donc $\{-4, 1, 3\}$. La dimension de chaque sous-espace propre de A vaut donc 1, et son polynôme caractéristique est scindé. Donc, A est diagonalisable.

En résolvant les équations $AX = 3X$ et $AX = -4X$, on trouve que $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A , pour les valeurs propres 3 et -4 .

Ces vecteurs propres étant associés à des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est donc une base de \mathbb{K}^3 .

Ainsi, pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w) , c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

on a $P^{-1}AP = \text{Diag}(1, 3, -4)$.

2. On a $\chi_B(X) = (X-1)^3$. La matrice B est diagonalisable si et seulement si $\dim(Ker(B - I_3)) = 3$. Or, on a $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2, donc $\dim(Ker(B - I_3)) = 1$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable

3. On a $\chi_C(X) = (X - 1)(X - 2)^2$. Le spectre de C est $\{1, 2\}$ et $\dim(E_1(C)) = 1$.
La matrice C est diagonalisable si et seulement si $\dim(\text{Ker}(C - 2I_3)) = 2$.

Or, on a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1, donc $\dim(\text{Ker}(C - 2I_3)) = 2$.

Cette matrice est bien diagonalisable.

On remarque que l'on a $Ce_1 = e_1$, $Ce_2 = 2e_2 + 5e_1$, $Ce_3 = 2e_3 - 3e_1$.

On a donc $E_1(C) = \text{Vect}(e_1)$.

On trouve que deux vecteurs propres pour 2 sont $v = e_2 + 5e_1$ et $w = e_3 - 3e_1$.

La famille (e_1, v, w) forme une base de \mathbb{K}^3 .

Pour P la matrice de passage de la base canonique vers (e_1, v, w) , on a $P^{-1}CP = \text{Diag}(1, 2, 2)$.

4. La matrice D est de rang 1. Donc, $\dim(\text{Ker}(D)) = n - 1$. Ainsi, on a $X^{n-1} \mid \chi_D(X)$.
Cela donne $\chi_D(X) = X^n - \text{Tr}(D)X^{n-1} = X^n - nX^{n-1} = X^{n-1}(X - n)$.
Le spectre de D est donc $\{0, n\}$. On a de plus $\dim(E_n(D)) = 1$.

On a obtenu que $\dim(E_0(D)) = n - 1$.

Ainsi, la matrice D est diagonalisable.

On trouve facilement des vecteurs propres pour ces deux sous-espaces propres :

Pour $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, on a $Du = n.u$.

Pour $v_2 = e_2 - e_1$, $v_3 = e_3 - e_2$, \dots , $v_n = e_n - e_{n-1}$, on a $Dv_k = 0$.

La famille (v_2, \dots, v_n) est libre, c'est donc une base de $E_0(D)$.

Ainsi, la famille (u, v_2, \dots, v_n) est une base formée de vecteurs propres de D .

Pour P la matrice de passage de la base canonique vers (u, v_2, \dots, v_n) , on obtient :

$$P^{-1}DP = \text{Diag}(n, 0, \dots, 0).$$

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que tA est diagonalisable.

Soit $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ On a $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_A(\lambda_i)} = \chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$, donc on connaît le polynôme caractéristique de tA et le spectre de tA .

Soit $1 \leq i \leq r$. Montrons que $\dim(E_{\lambda_i}({}^tA)) = \dim(E_{\lambda_i}(A))$.

On a ${}^tA - \lambda_i I_n = {}^t(A - \lambda_i I_n)$.

D'après des résultats des cours d'algèbre précédents sur la transposée, on a $\text{rang}({}^t(A - \lambda_i I_n)) = \text{rang}(A - \lambda_i I_n) = \text{rang}({}^tA - \lambda_i I_n)$.

Donc, avec le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\text{Ker}({}^tA - \lambda_i I_n)) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda_i I_n)) = \dim(E_{\lambda_i}(A))$.

Comme A est diagonalisable, on obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}({}^tA)) = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n,$$

donc tA est diagonalisable.

Autre preuve : A est diagonalisable donc A est semblable à une matrice diagonale D . Alors, tA est semblable à ${}^tD = D$. Donc, tA est diagonalisable car semblable à une matrice diagonale.

Exercice 30. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Trouver une matrice triangulaire supérieure B de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (où a et b sont deux réels que l'on déterminera) et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = B$.

1. On a $\text{Tr}(A) = 2$ et $\det(A) = 1$. Ainsi, $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Donc, $\text{Spec}(A) = \{1\}$ et $m_A(1) = 2$.

Si A était diagonalisable, alors on aurait une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \text{Diag}(1, 1) = I_2$.

Cela donnerait : $A = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.

Comme $A \neq I_2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Si on a $P^{-1}AP = B$, alors A est semblable à B . Donc A et B ont même polynôme caractéristique, même spectre, même multiplicité de valeurs propres, même dimension de sous-espaces propres.

Comme B est une matrice triangulaire, ses coefficients diagonaux doivent ainsi être 1 et 1 : $a = b = 1$.

Maintenant, déterminons la matrice P .

On voit que e_1 est un vecteur propre de B . Donc, $P(e_1)$ est un vecteur propre de A .

On cherche ainsi les vecteurs propres de A pour 1. On remarque que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. De plus, comme A n'est pas diagonalisable, on doit avoir $\dim(E_1(A)) = 1$, donc $E_1(A) = \text{Vect}(u)$.

Cherchons un deuxième vecteur pour compléter la famille (u) en une base de \mathbb{K}^2 .

On voudrait avoir $A(v) = v + u$.

Prenons $v_0 = e_1$. On a $A(v_0) = A(e_1) = -e_2 = e_1 - u = v_0 - u$. En posant alors $v = -v_0 = -e_1$, on a $A(v) = e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2) = v + u$.

Donc, pour $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v) , on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Exercice 31. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une base formée de vecteurs propres de A .
- Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.
- (Bonus) Déterminer toutes les matrices B qui commutent avec A .

- On a $\text{Tr}(A) = 0$.

On remarque que la somme des colonnes $C_1 + C_2 + C_3$ vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela indique que

pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $Au = u$. Donc u est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Un calcul de déterminant donne $\det(A) = -6$. On a donc : $\chi_A(X) = X^3 + 0X + 6 = (X - 1)(X^2 + bX + c)$.

On obtient donc que $c = -6$ et $b = 1$, c'est-à-dire $\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 + X - 6)$.

Les racines de $X^2 + X - 6$ sont -3 et 2 , d'où $\chi_A(X) = (X - 1)(X + 3)(X - 2)$.

On a donc $\text{Spec}(A) = \{-3, 1, 2\}$. On détermine v un vecteur propre de A pour la valeur propre -3 , et w un vecteur propre de A pour la valeur propre 2 .

$$Av = -3v \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow v = \left(\frac{1}{11}z, \frac{7}{11}z, z\right), z \in \mathbb{R}.$$

Donc, $v = (1, 7, 11)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre -3 .

$$Aw = 2w \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow w = (z, 2z, z), z \in \mathbb{R}.$$

Donc, $w = (1, 2, 1)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2 .

Les vecteurs u, v, w étant des vecteurs propres de A pour des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est donc libre. C'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

On a trouvé base formée de vecteurs propres de A , donc A est diagonalisable.

- Soit B une matrice qui commute avec A . Alors B laisse stables les sous-espaces propres de A . Donc, B laisse stable les sous-espaces $E_1(A) = \text{Vect}(u)$, $E_2(A) = \text{Vect}(w)$ et $E_{-3}(A) = \text{Vect}(v)$.

Ainsi, u, v, w sont des vecteurs propres de B .

On a trouvé une base formée de vecteurs propres de B , donc B est diagonalisable.

- La matrice A est diagonalisable. En prenant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v, w) formée de vecteurs propres, on obtient :

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(1, -3, 2) = D, A = PDP^{-1}$$

Ainsi, on a $BA = AB$ si et seulement si $BPDP^{-1} = PDP^{-1}B$.

C'est-à-dire, si et seulement si $P^{-1}BP.D = D.P^{-1}BP$.

On se ramène à trouver toutes les matrices C telles que $CD = DC$.

Posons $C = (c_{i,j})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Alors, les matrices CD et DC s'écrivent $CD = (c_{i,j} \cdot \lambda_j)_{i,j}$ et $DC = (\lambda_i c_{i,j})_{i,j}$.

Si $CD = DC$, on doit donc avoir $\lambda_i c_{i,j} = \lambda_j c_{i,j}$, pour tous i, j .

Comme les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont deux à deux distincts, on en déduit que $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

$$\text{Ainsi, la matrice } C \text{ est de la forme } C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une matrice diagonale $\text{Diag}(a, b, c)$ commute avec la matrice diagonale D .

On a donc $CD = DC$ si et seulement si $C = \text{Diag}(a, b, c)$, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Ainsi, on a $AB = BA$ si et seulement si $B = P \text{Diag}(a, b, c) P^{-1}$, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$B = aP \text{Diag}(1, 0, 0) P^{-1} + bP \text{Diag}(0, 1, 0) P^{-1} + cP \text{Diag}(0, 0, 1) P^{-1} = aM_1 + bM_2 + cM_3,$$

L'ensemble des matrices B qui commutent avec A est donc $\text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$, un sous-ev de dimension 3.

Bonus : Soient L_1, L_2, L_3 les polynômes d'interpolation associés à $(1, -3, 2)$.

On a alors $L_1(\text{Diag}(1, -3, 2)) = \text{Diag}(L_1(1), L_1(-3), L_1(2)) = \text{Diag}(1, 0, 0)$.

De même, on obtient que $L_2(D) = \text{Diag}(0, 1, 0)$ et que $L_3(D) = \text{Diag}(0, 0, 1)$.

Les propriétés des polynômes d'endomorphismes donnent :

$$M_1 = PL_1(D)P^{-1} = L_1(PDP^{-1}) = L_1(A).$$

De même, on trouve que $M_2 = PL_2(D)P^{-1} = L_2(A)$, et que $M_3 = L_3(A)$. Ces matrices sont des polynômes en A .

Un rapide calcul donne $L_1(X) = \frac{1}{-4}(X^2 + X - 6I_3)$, $L_2(X) = \frac{1}{20}(X^2 - 3X + 2I_3)$, $L_3(X) = \frac{1}{5}(X^2 + 2X - 3I_3)$.

Donc, les matrices M_1, M_2, M_3 sont des combinaisons linéaires de I_3, A, A^2 . On peut donc calculer ces matrices juste en calculant A^2 (pas besoin de connaître une base de vecteurs propres, ni la valeur de P^{-1} , ni de faire beaucoup de produits de matrices).

Bonus 2 : L'ensemble $\mathbb{K}[A]$ est un sous-ev de matrice qui commutent avec A . Ce sous-ev est au moins de dimension 3 (A^2 n'est pas combinaison linéaire de I_3 et de A , sinon A aurait un polynôme annulateur de degré 2, et donc au plus deux valeurs propres distinctes).

Ainsi, on en déduit que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est exactement $\mathbb{K}[A]$, et que $\dim(\mathbb{K}[A]) = 3$, c'est-à-dire $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Ce résultat n'est pas vrai en général (par exemple, pour E une homothétie, toute matrice B commute avec E).

Exercice 32. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt \mathbb{R}^3 , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F .
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J .
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K .
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K .)
5. Montrer qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (C'est la même matrice P pour tout (a, b, c) .)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?

Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. $M(a, b, c) = a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K$, d'où $F = \text{Vect}(I, J, K)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille (I, J, K) est une famille génératrice de F . Montrons que la famille (I, J, K) est aussi libre :

$$a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc (I, J, K) est une base de F .

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$
 $-\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}.$

D'où $\chi_J(X) = X(X^2 - 2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\text{Spec}(J) = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

On remarque que l'on a

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La résolution des équations $JX = \sqrt{2}X$ et $JX = -\sqrt{2}X$ nous donne deux autres vecteurs propres :

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\text{Ker}(J - 0I) = \text{Vect}(\vec{u})$, $\text{Ker}(J - \sqrt{2}I) = \text{Vect}(\vec{v})$ et $\text{Ker}(J + \sqrt{2}I) = \text{Vect}(\vec{w})$. La matrice J est donc diagonalisable.

3. On trouve rapidement trois vecteurs propres de K :

$$K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le spectre de K est donc : $\text{Spec}(K) = \{0, 2\}$, et ses sous-espaces propres sont $\text{Ker}(K - 0I) = \text{Vect}(\vec{u})$ et $\text{Ker}(K - 2I) = \text{Vect}(\vec{v}', \vec{w}')$.

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) vers la base (u, v, w) . On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Avec cette matrice P , on obtient :

$$P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, les vecteurs v et w sont des vecteurs propres de K pour la valeur propre 2 : $v = v' + \sqrt{2}w'$ et $w = v' - \sqrt{2}w'$, donc $v, w \in \text{Ker}(K - 2I) = \text{Vect}(v', w')$.

5. Pour cette matrice P , la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale car $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P = P^{-1} \cdot (aI + bJ + cK) \cdot P = a \cdot P^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP$.
6. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} + 2c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + 2c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le spectre de la matrice $M(a, b, c)$ est donc $\{a, a + b\sqrt{2} + 2c, a - b\sqrt{2} + 2c\}$.

Remarque : On pouvait remarquer que $K = J^2$, donc les vecteurs propres de J sont des vecteurs propres de K .