Feuille de TD

Variables aléatoires

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des v.a. discrètes.

1. Montrer que $X + Y$ est une v.a. discrète.
2. Montrer que XY est une v.a. discrète.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(X)$ est une v.a. discrète.
   On pose $X(\Omega) = \{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ (avec $N = +\infty$ si $X(\Omega)$ est dénombrable), et $A_n = X^{-1}(\{x_n\})$.
4. Démontrer que $X = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbb{1}_{A_n}$.
5. En déduire une expression de $f(X)$.
6. Pour $Y = \sum_{m=0}^{M} y_m \mathbb{1}_{B_m}$, en déduire une expression de XY.
7. Exprimer $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_X(\{x_n\})$ en fonction des A_k.
   Calculer cette somme.
8. Si l'on connaît la loi de X (la fonction $\mathbb{P}_X$), peut-on retrouver la fonction X ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X (*i.e.* calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) dans les cas suivants :

1. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n + 1) = \frac{4}{n + 1}\mathbb{P}(X = n).$$
2. On suppose que X ne s'annule pas et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n) = p \cdot \mathbb{P}(X \geq n).$$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n + 1) = (1 - p) \cdot \mathbb{P}(X = n).$$
   En déduire la loi de probabilité suivie par X.

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. On considère un jeu de Pile ou Face, avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux.
Soit $n \geq 1$. On note X_n la v.a. qui donne le nombre de Pile obtenus avec les n premiers lancers.
On note Y la v.a. qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier Face, avec $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais Face.

1. Donner l'ensemble image des v.a. X_n, et calculer leur lois de probabilités.
2. Calculer leur espérance $\mathbb{E}(X_n)$.
3. Donner l'ensemble image de la v.a. Y, et calculer $\mathbb{P}(Y = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(Y < +\infty) = 1$.
5. En déduire que l'on peut considérer Y comme une v.a. réelle, et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = Y^{-1}(\{n\})$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
7. On définit la v.a. $X_Y : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $X_Y(\omega) = X_{Y(\omega)}(\omega)$ si $Y(\omega) < +\infty$, et $+\infty$ sinon.
   Trouver une relation entre X_Y et Y.

Exercice 4. Un sportif tente de franchir en sautant des hauteurs successives numérotées 1, ... , n,... .
On suppose que tous les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n est de $\frac{1}{n}$.
On pose X la v.a. qui indique la dernière hauteur franchie avant le premier échec.
Quelle est le domaine d'arrivée de la v.a. X ?
Montrer que la v.a. X est finie $\mathbb{P}$-presque sûrement.
Déterminer la loi de probas de X.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 5. (*) Soit $p \in]0,1[$. On considère un jeu de Pile ou Face (on associe 1 à Pile et 0 à Face), où on lance la pièce autant de fois que l'on veut. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux, et qu'il y a probabilité p de faire Pile.
Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le résultat du lancer numéro n. Ce sont des v.a. discrètes.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \{X_{n-1} \neq X_n\}$.
   Les événements A_n sont-ils indépendants ?
   Discuter selon la valeur de p.
2. On définit la v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ par $T(\omega) = \inf\{n \text{ t.q. } X_{n-1}(\omega) \neq X_n(\omega)\}$ si cet ensemble est non vide, et $T(\omega) = +\infty$ sinon.
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(T = n)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3. On définit la v.a. $X_T : \Omega \to \{0,1\}$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
   Pour quelles valeurs de p a-t-on

$$\mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (1,0)) = \mathbb{P}((X_T, X_{T+1}) = (0,1))?$$

Exercice 6. Une famille a deux enfants. L'un des enfants est un garçon.
Quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

Exercice 7. A un jeu télévisé, on met 1 voiture et 2 chèvres derrière 3 portes. Le candidat doit choisir une porte, et il gagne ce qu'il y a derrière.
Un candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre alors une autre porte, qui cachait une chèvre.
Le présentateur propose au candidat de changer de porte, pour gagner ce qu'il y a derrière.
Le candidat doit-il garder sa porte, ou changer pour l'autre porte ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

Exercice 8. (*) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
• On suppose que X, Y sont intégrables.
Est-ce que XY est toujours intégrable ?
On suppose de plus que pour tous $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$, les événements $X^{-1}(\{x\})$ et $X^{-1}(\{y\})$ sont indépendants.
Montrer alors que XY est intégrable, et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 9. On lance deux dés équilibrés de façon indépendante. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.
On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de probas X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
   On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 10. Pour X une v.a. discrète de carré intégrable, on appelle v.a. centrée de X la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$.
Si $Var(X) \neq 0$, on appelle v.a. réduite de X la v.a. $Z = \frac{X}{Var(X)}$.
Soit $p \in]0,1[$. Soit X une v.a. de Bernouilli de paramètre p. Déterminer X^*, la v.a. centrée réduite de X.

Exercice 11. Calculer $\mathbb{P}(X < E(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\text{Var}(X)$.

Exercice 12. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

(b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle
$\mathbb{P}(X=k|Y=n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

(c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y=i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 13. (*)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n).$$

   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$ est convergente.
   Montrer que X est d'espérance finie.

   (c) Réciproquement, on suppose que X est d'espérance finie.
   Montrer alors que $\big(n\mathbb{P}(X>n)\big)_n$ tend vers 0, que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)$ converge, et que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).$$

2. **Application :** Soient $N, n \geq 1$.
   On prend une urne avec N boules identiques au toucher, numérotées de 1 à N.
   On fait n tirages de boules avec remise. Tous les tirages sont indépendants les uns des autres.
   On note X la v.a. qui donne le plus grand numéro obtenu lors des n tirages.

   (a) Soit $1 \leq k \leq N$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$?
   En déduire la loi de probas de X.

   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\dfrac{k}{N})^n)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$). Calculer cette limite.

   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Montrer que si X est de carré intégrable, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X>k).$$

Exercice 14. Soit $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $X_{,1}, X_2 : \Omega \to \{1, \dots, n\}$ deux v.a. qui sont indépendantes et qui ont toutes deux comme loi la mesure de probas uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.
Soit $a \in \{1, 2, \dots, n\}$. On note Y la v.a. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probas de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, et la comparer à $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle minimale ? maximale ?

Exercice 15. (*) Soient $n, m \geq 1$. Dans un jeu, n candidats doivent traverser un pont à m planches.
Pour chaque planche, une moitié est robuste, tandis que l'autre moitié est très fragile. Les deux moitiés sont identiques à l'oeil.
Si un candidat marche sur la mauvaise moitié d'une planche, il a perdu. S'il traverse les m planches, il a gagné.
Les candidats vont sur le pont l'un après l'autre, et le pont reste le même entre chaque candidat.
Le candidat no.2 peut donc voir où le candidat no.1 a marché, et suivre ses pas (et éviter la moitié fragile si le candidat no.1 a perdu).
On note $X_k : \Omega \to \{1, \dots, m+1\}$ la v.a. qui indique la progression du candidat numéro k. Elle vaut $1 \leq r \leq m$ si le candidat perd à la planche no.r, et $m+1$ si le candidat traverse tout le pont.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = r)$, $1 \leq r \leq m$ et $\mathbb{P}(X_1 = m+1)$.

2. Soient $1 \leq r, s \leq m+1$. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = s | X_1 = r)$.
   On pourra distinguer des cas.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = s)$, pour $2 \leq s \leq m$ et $s = m+1$.
4. Soient $1 \leq r < s \leq m$. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1, X_2 = s, X_1 = r)$. Que trouve-t-on ?
   On pourra utiliser des probabilités conditionnelles.
5. Calculer $\mathbb{P}(X_3 = m+1 | X_2 = m+1)$.
   En déduire $\mathbb{P}(X_3 = m+1)$.
6. Trouver une expression générale de $\mathbb{P}(X_k = m+1)$, pour $k \geq 1$.
   On pourra s'aider des questions précédentes.
   Quelle méthode peut-on utiliser pour démontrer cela ?
7. Pour quelles valeurs de $k \geq 1$ a-t-on $\mathbb{P}(X_k = m+1) \geq \frac{1}{2}$?
8. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
   Montrer que $\mathbb{E}(X_1) \leq 2$ et que cette espérance converge vers 2 quand $m \to +\infty$.

Exercice 16. Soient α, $\beta \in]0,1[$. On pose

$$g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(i,j) \mapsto \alpha\beta(1-\alpha)^i(1-\beta)^j.$$

1. Vérifier que la famille $\big(g(i,j)\big)_{(i,j)}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Sur $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\right)$, on note $X, Y : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ deux v.a. discrètes définies par
   $$X(i,j) = i,\ Y(i,j) = j,\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$
   Donner les lois de probas de X et Y.
   Retrouver des lois de probas usuelles.
3. Calculer
   (a) $\mathbb{P}(X = Y)$,
   (b) $\mathbb{P}(X > Y)$.
4. Soit $Z : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ la v.a. discrète définie par
   $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ Z(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 17. Soit $p \in]0,1[$. Une personne fait 12 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité p de faire Pile.
Une deuxième personne fait 36 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité $\frac{p}{3}$ de faire Pile. On note X la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la première personne, et Y la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la deuxième personne.
• Décrire les v.a. X, Y (image, loi de probas, espérance, variance)
• On se demande si l'on a plus souvent $X > Y$ ou $Y < X$. Quelle(s) quantité(s) faut-il calculer pour le savoir ?

Exercice 18. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi géométrique de paramètres respectifs $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

Exercice 19. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard uniforme une boîte, puis une boule dans la boîte.
Soient X, Y les v.a. associées au numéro de la boîte et au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi de probas de la v.a. (X, Y).
2. Déterminer la loi de probas de Y, et donner son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 20.
• Calculer la fonction génératrice d'une v.a. X dont la loi de probas est la loi uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$.

• On prend deuxs dé à 6 faces, que l'on truque. On lance ces dés, de façon indépendante.
Soient X_1, X_2 les v.a. associées au résultats de chaque dé.
Ecrire la fonction génératrice de $X_1 + X_2$ en fonction des lois de probas $(p_1, \dots, p_6)$ et $(q_1, \dots, q_6)$ de X_1 et de X_2.
• Peut-on truquer deux dés à 6 faces de sort que la somme des faces obtenues en lançant les dés ait une loi de probas uniforme ?

Exercice 21. Soit $p \in]0,1[$. On fait un Pile ou Face avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce de façon indépendante, jusqu'à obtenir Pile une deuxième fois.
On note X la v.a. qui donne le nombre de Face obtenus pendant les lancers.

1. Déterminer la loi de probas de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. On procède à l'expérience suivante :
   Si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules dans une urne, numérotées de 0 à n.
   Puis, on tire au hasard uniforme une boule de cette urne. On pose Y la v.a. associée au numéro obtenu.
   Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
   Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$.
   Donner la loi de probas de Z et vérifier que es v.a. Z et Y sont indépendantes.

Exercice 22. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on place une puce en $(0,0)$.
La puce se déplace en sautant. Chaque saut est de longueur 1, dans l'une des 4 directions (haut, bas, gauche, droite), de façon uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose M_n la v.a. qui donne la position de la puce après n sauts. On pose X_n, Y_n les v.a. coordonnées du point M_n.
On a donc $M_0 = (0,0)$ (fonction constante égale à $(0,0)$).
Toutes les v.a. sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$.
   On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, ... , T_n sont indépendantes.
   (a) Déterminer la loi de probas de T_n.
   Calculer $\mathbb{E}(T_n)$, et la variance de T_n.
   (b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2,... , T_n.
   (c) Que vaut $\mathbb{E}(X_n)$?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.
   (a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
   (b) Établir l'inégalité : $\mathbb{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.
   (a) Si n est impair, que vaut p_n ?
   (b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.
   Etablir la relation :
   $$p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$$
   On pourra utiliser la relation : $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.
4. Que dire de la série $\sum p_n$? Que peut-on en conclure ? On ne demande pas de preuve !

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. discrète et positive.

1. Montrer que
   $$\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$
   On pourra utiliser des fonctions indicatrices.
2. Montrer que
   $$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty \iff \mathbb{E}(X) < +\infty.$$
   On pourra utiliser la première question.

■ *Théorèmes limites . . .*

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. discrètes. On suppose que les $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont de même loi de probas et sont indépendantes entre elles.

1. Montrer que $\dfrac{X_n}{n}$ converge vers 0 en probabilité, c-à-d
$$\forall \varepsilon, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$
2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty)$, alors $\mathbb{E}\left(\left| \dfrac{X_n}{n} \right| \right)$ converge vers 0. Étudier la réciproque.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n} = 0 \right) = 1$.
   Indication : Utiliser l'exercice précédent et le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 25.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de probas, et de carré intégrable.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Montrer que $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left| \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \right| \geq a \right) \leq \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   (a) On prend une urne avec 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire, sans remise, une boule dans cette urne, de façon aléatoire uniforme et indépendante.
   Pour $n \geq 1$, on pose Y_n la v.a. qui donne la couleur de la boule obtenue au tirage numéro n. (rouge=1, noire=0)
   Donner la loi de la v.a. Y_n.
   Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
   (b) Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Exercice 26. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$.

1. On pose $X = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$.
   Montrer que $Var(X) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'on a
$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \right| < \varepsilon \right) \to_{n\to+\infty} 1$$

Exercice 27. Une personne joue à un jeu de Pile ou Face équilibré ($p = 0.5$).
La première fois, elle mise 100 yuan.
Si la personne perd, elle rejoue et mise 200 yuan.
A chaque fois que la personne perd, elle rejoue et mise le double de la partie précédente.
Dès que la personne gagne, elle s'arrête de miser et garde son argent.
On note $X_n : \Omega \to \mathbb{Z}$ la v.a. qui indique l'argent de la après n parties de Pile ou Face.
On suppose que $X_0 = 100$. (Si la personne perd plusieurs fois, elle a une dette d'argent.)

1. Soit $n \geq 1$.
   Si le joueur a perdu n fois, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité qu'il perde n fois ?
2. Soit $n \geq 1$. Si le joueur perd $n-1$ fois puis gagne ensuite, combien vaut X_n ?
   Quelle est la probabilité de cet événement ?
3. En déduire l'ensemble image $X_n(\Omega)$, ainsi que la loi de probas de X_n.
4. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, pour tout $n \geq 1$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 100) \to_{n\to+\infty} 1$.
   Ainsi, si la personne joue autant de fois qu'elle veut, elle repartira forcément gagnante.
6. Combien de fois la personne doit-elle jouer en moyenne pour repartir gagnante ?
7. On suppose maintenant que la personne ne peut pas s'endetter autant qu'elle veut. Si elle s'endette de plus de M yuan, pour $M > 0$, elle ne peut

plus jouer et doit aller travailler pour payer sa dette.
Dans cette situation, est-ce qu'il est intéressant pour elle de jouer au jeu ?