Chapitre 12 - Espaces vectoriels

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$. Ces ensembles sont des corps.

Définitions - Exemples

Définition 1
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** E est un ensemble muni :

1. D'une addition $+$:

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

telle que :

(a) Pour tous $x, y, z \in E$, on a $x + (y + z) = (x + y) + z$ (+ est associative)

(b) Il existe un élément de E appelé **vecteur nul**, noté 0_E ou 0, tel que pour tout $x \in E$, on a $x + 0 = x$. (+ a un élément neutre)

(c) Pour tout $x \in E$, il existe un élément de E noté $-x$, appelé **symétrique** de x (ou opposé), tel que $x + (-x) = 0$. (out élément a un opposé)

(d) Pour tous $x, y \in E$, on a $x + y = y + x$. (+ est commutative)

2. D'une multiplication externe ., appelée **multiplication par un scalaire** :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda.x \end{aligned}$$

telle que pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

(a) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$. (distributivité à gauche de $\cdot$)

(b) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$. (distributivité à droite de $\cdot$)

(c) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$. (associativité de $\cdot$)

(d) $1.x = x$. (1 est un élément neutre pour $\cdot$)

Les éléments de E s'appellent des **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des **scalaires**.
On notera également $(E, +, .)$ lorsque l'on veut préciser quelles sont les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

Remarque 2 — *On notera toujours les lois + et . et le plus souvent.*
Parfois, on oubliera même de mettre le point : $2.x = 2x$.

Exemple 3 —

1. *Un espace vectoriel n'est jamais vide, car il contient au moins le vecteur nul* 0.
L'ensemble $E = \{0\}$ *est un espace vectoriel sur n'importe quel corps de scalaires* $\mathbb{K}$.
On a en effet $0 + 0 = 0$ *et* $\lambda.0 = 0$.

2. *L'espace* $\mathbb{R}^2$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Un vecteur* u *de* $\mathbb{R}^2$ *est défini par ses coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La somme et le produit par un scalaire sont définis de la façon suivante :

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \text{on a } u + v = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix},\ \lambda.u = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

3. *De la même manière, l'espace* $\mathbb{K}^2$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Un vecteur* u *est défini par ses coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *La somme et le produit par un scalaire sont définis par :*

$$\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \text{on a } u + v = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix},\ \lambda.u = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Exemples fondamentaux

Proposition 4
$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Proposition 5 (**Espace vectoriel produit**)
Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $E \times F$ muni de l'addition

$$\begin{aligned}(E \times F) \times (E \times F) &\to E \times F \\ ((x,y),(x',y')) &\mapsto (x+x', y+y')\end{aligned}$$

et de la multiplication externe

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times (E \times F) &\to E \times F \\ (\lambda,(x,y)) &\mapsto (\lambda x, \lambda y)\end{aligned}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $E \times F$ est appelé **espace vectoriel produit** de E et F.

Exemple 6 (**L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**) — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
• *L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres dans $\mathbb{K}$.*
C'est-à-dire : $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ \text{avec}, \forall 1 \leq i \leq n,\ x_i \in \mathbb{K}\}$.

On peut aussi écrire un élément de $\mathbb{K}^n$ en colonne, c'est-à-dire : $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

• *Alors, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses opérations sont :*

$$\begin{cases} \forall u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, & u+v = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda.u = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le vecteur nul est $(0, 0, \dots, 0)$.

Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ sont les **exemples fondamentaux** d'espaces vectoriels.
Pour de petites valeurs de n, et en prenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vous retrouvez $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ (la droite réelle, le plan, l'espace).
La notion d'espace vectoriel généralise toutes les opérations sur les vecteurs que vous pouviez effectuer dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble quelconque.
Alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions $f : X \to E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses opérations sont :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f+g : t \mapsto f(t)+g(t),\ \lambda.f : t \mapsto \lambda f(t).$$

Le vecteur nul est alors la fonction constante $t \mapsto 0$ (la fonction nulle).

Exemple 8 —

1. *$\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses opérations $+$ et $\cdot$ sont :*

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

EXEMPLE 9 —

1. *L'ensemble des matrices de taille $n \times p$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses opérations $+$ et $\cdot$ sont celles déjà définies sur les matrices.*
2. *L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses opérations $+$ et $\cdot$ sont celles déjà définies sur les polynômes.*

2 Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de E si $F \neq \emptyset$ et si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F, \text{ on a } \lambda x + \mu y \in F.$$

REMARQUE 11 — *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors le vecteur nul 0 de E appartient à F.*

REMARQUE 12 — *Les ensembles $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

PROPOSITION 13
Si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Il faut montrer que $(F, +, .)$ vérifie tous les axiomes d'un espace vectoriel. A vous de le faire ! □

REMARQUE 14 — *Pour montrer qu'un ensemble $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ plus grand et que l'on connaît déjà.*
Souvent, l'ensemble E sera $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

MÉTHODE 15 — *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.*
Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. *$0_E \in F$,*
2. *F est stable par addition : pour tous $x, y \in F$, $x + y \in F$,*
3. *F est stable par multiplication par un scalaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in F$, $\lambda x \in F$.*

EXEMPLE 16 — *On sait que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On veut montrer que l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
On a bien $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

1. *La fonction nulle est continue ;.*
2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues alors $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, donc $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stable par addition.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue alors $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, donc $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stable par multiplication par un scalaire.*

On en déduit que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 17
Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve — L'intersection est non vide : elle contient le vecteur nul 0_E car tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent 0_E. Soit $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel, et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. □

REMARQUE 18 — ***Attention !*** *Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.*
Contre-exemple : $F = \mathbb{R}(1, 0)$ et $G = \mathbb{R}(0, 1)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (ce sont des droites vectorielles). Mais $F \cup G$, la réunion de deux droites, n'est pas un sous-espace vectoriel.
En effet, on a $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

Remarque 19 (Abréviations) — *Dans ce cours, on abrègera parfois "espace vectoriel" en "e.v.", et "sous-espace vectoriel" en "s-e.v.".*
Si vous voulez utiliser une abréviation, dans une copie de concours : Il faut d'abord utiliser le mot en entier une première fois, puis il faut indiquer à un moment le choix d'abréviation que vous prenez.

Exemples 20

1. *L'ensemble* $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-e.v. de* $\mathbb{K}[X]$.
2. *L'ensemble des matrices diagonales est un sous-e.v. de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. *L'ensemble des matrices triangulaires est un sous-e.v. de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. *L'ensemble des matrices symétriques/antisymétriques est un sous-e.v. de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. *L'ensemble des matrices inversibles* ***n'est pas*** *un sous-e.v. de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
6. *L'ensemble des suites convergentes est un sous-e.v. de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
7. *L'ensemble des suites divergentes* ***n'est pas*** *un sous-e.v. de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemples 21

1. *L'ensemble* S *des solutions d'un système linéaire* n *équations* p *inconnues* ***homogène*** *est un sous-e.v. de* $\mathbb{K}^p$.
2. *L'ensemble des solutions d'une EDL1/EDL2 homogène sur* I *est un sous-e.v. de* $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
3. *Pour* $a, b \in \mathbb{K}$ *fixés, l'ensemble des suites qui vérifient* $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ *(suites récurrentes linéaires d'ordre* 2*) est un sous-e.v. de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Les propriétés pratiques que nous avons vues sur les systèmes linéaires/EDL/suites récurrentes linéaires viennent en partie des propriétés d'espaces vectoriels qui se cachent derrière.
Le terme ***linéaire*** *est un terme qui fait référence à la structure d'espace vectoriel.*

3 Somme de sous-espaces vectoriels, combinaisons linéaires

Combinaisons linéaires

Définition 22
On dit qu'un vecteur x est une **combinaison linéaire** de vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ s'il existe λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Proposition 23
Une partie $F \subset E$ d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si et seulement si F est non vide et F est stable par combinaison linéaire.
C'est-à-dire, si $F \neq \emptyset$ et si pour tous x_1, ..., $x_n \in F$ et tous λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Définition 24
Soit $A \subset E$ une partie de E, on définit le **sous-espace vectoriel engendré par** A comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\mathrm{Vect}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{avec } n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, \ldots, x_n \in A \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.
En particulier, si $x_1, \ldots, x_n \in E$, on note l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Proposition 25
$\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.
De même, $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Preuve — Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset H$.
H est stable par combinaison linéaire donc $\mathrm{Vect}(A) \subset H$. □

Exemple 26 —

1. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé (i, j, k), on pose $e_1 = (0, 1, 2)$ et $e_2 = (0, 2, 3)$. Alors $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2.*
   On a $k = 2e_1 - e_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ et $j = e_1 - 2k = -3e_1 + 2e_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, donc $\mathrm{Vect}\,(j, k) \subset \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$.
   Et réciproquement, on montre que $e_1, e_2 \in \mathrm{Vect}\,(j, k)$. Cela montre par double-inclusion que $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}\,(j, k)$.
2. *Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. On a*
$$P = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+2y\\-x+3y\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$
3. *Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}2x-y\\x+2y\\3x-2y\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}^2 \right\} \subset \mathbb{K}^3$. Alors, F est un sous-espace vectoriel car :*
$$F = \left\{ x\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Définition 27
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On définit la **somme** de F et G comme :
$$F + G := \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$

Proposition 28
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve — $F + G \subset E$ et on a $0 \in F$ et $0 \in G$ donc $0 = 0 + 0 \in F + G$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F + G$, c'est-à-dire qu'il existe $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. On a donc $x + y = (x_F + y_F) + (x_G + y_G) \in F + G$ et $\lambda x = \lambda x_F + \lambda x_G \in F + G$. □

Exemple 29 — *Si $F = \mathbb{R}x_1$ et $G = \mathbb{R}x_2$, alors $F + G = \mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2 = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$.*
$F + G$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de x_1 et x_2.

Exemple 30 —

1. *On a $\mathbb{C} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i$.*
2. *On a $\mathbb{R}^3 = \{(0, y, z),$ avec $y, z \in \mathbb{R}\} + \{(x, y, 0),$ avec $x, y \in \mathbb{R}\}$.*
3. *$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_0 = 0\} + \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_1 = 0\}$.*
   En effet, soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors en posant v, w des suites telles que ($v_0 = 0$ et $v_n = u_n$ si $n > 0$), ($w_0 = u_0$ et $w_n = 0$, si $n > 0$), on obtient $u = v + w$.

Définition 31
Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. La **somme** des F_i est l'ensemble
$$\sum_{i=1}^n F_i := \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \text{ , avec } x_i \in F_i, \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$
C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les F_i.
C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments des F_i.

Exemple 32 — *On a $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Cet ensemble est l'ensemble des combinaisons linéaires des x_i.*

3.1 Somme directe

Définition 33
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont en **somme directe** si pour tout $x \in F+G$, il existe un **unique** couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.
On note alors la somme $F \oplus G$.

Théorème 34
Deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Exemple 35 — *$F = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $G = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Soit $u = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in F \cap G$.*
Comme $u \in F$, on a $y = 0$. Comme $u \in G$, on a $x = 0$.
Finalement on obtient $u = 0$. Ainsi, F et G sont en somme directe.

Définition 36
Soient E un e.v. et F, G deux sous-e.v. de E.
On dit que F et G de E sont **supplémentaires dans** E s'ils sont en somme directe et si $F + G = E$.
On note alors $E = F \oplus G$. On a donc :

$$E = F \oplus G \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}).$$

Définition 37 (**Somme directe de plusieurs sous-e.v.**)
Soient F_1, ..., F_n des sous espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1, \ldots, F_n$ sont en **somme directe** si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} F_i$, il existe un **unique** n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
On dit qu'ils sont **supplémentaires dans E** s'ils sont en somme directe et si $\sum_{i=1}^{n} F_i = E$.

Proposition 38
Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous espaces vectoriels de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.
2. Pour tous $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on a alors, $\forall 1 \leq i \leq n$, $x_i = 0$.
3. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

Démonstration —Sur feuille.

Remarque 39 —
1. *On a $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{K}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{K}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. En effet, tout vecteur $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :*
$$u = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$
2. *D'après la définition 37, on a $F = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_n$ si et seulement si tout vecteur $x \in F$ se décompose de manière unique dans $F_1, \ldots, F_n$:*
$\exists! x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \in F_i$ et $x = x_1 + \ldots + x_n$.
3. ***Attention !** Pour montrer que F_1 et F_2 sont en somme directe, il suffit de montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, mais ce n'est plus vrai pour $n \geq 3$:*
$$(\forall 1 \leq i < j \leq n,\ F_i \cap F_j = \{0\}) \not\Rightarrow F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$
Voici un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $F_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $F_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

4 Familles libres, familles génératrices, bases

4.1 Familles libres

Définition 40

1. Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est dite **libre** si elle vérifie pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \text{ pour tout } i\, \lambda_i = 0.$$
On dit aussi que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants.
2. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée** :
La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, .$$
3. Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ qui est infinie est dite **libre** si toute sous-famille finie est libre.
C'est-à-dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i_1, \dots, i_n \in I$ distincts, la famille $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ est libre.
Dans le cas contraire, la famille est dite **liée**.

Exemple 41 —

1. *Une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) est liée si et seulement si x_1 et x_2 sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_1 = \lambda x_2$ ou $x_2 = \lambda x_1$ (si et seulement si leur déterminant est non nul).*
2. *Une famille de trois vecteurs (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{R}^3$ est libre si et seulement si ils ne sont pas coplanaires (ssi leur déterminant est non nul).*
3. ***Attention !** La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, mais est liée dans le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}$. Le choix du corps $\mathbb{K}$ (de l'ensemble de tous les scalaires) est important.*

Caractérisation

Exemple 42 — *Si une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ contient deux vecteurs qui sont colinéaires, alors elle est liée.*

Proposition 43
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs.
Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs u_i est combinaison linéaire des autres.
C'est-à-dire, s'il existe $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $u_i = \sum_{k=1,\, k \neq i}^{n} \lambda_k u_k$.
C'est-à-dire, si $u_i \in Vect(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$.

Exemple 44 —
Pour $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, la famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas libre.
En effet, on a $u_3 = u_1 + u_2$. Le vecteur u_3 est une combinaison linéaire des autres.

Proposition 45
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs.
On suppose que $x_1 \neq 0$ et que pour tout $2 \leq i \leq n$ on a $x_i \notin \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_{i-1})$.
Alors, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Preuve — On procède par récurrence sur n :

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, la propriété est évidente.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 2$, supposons que la proposition est vraie pour toute famille de $n - 1$ vecteurs. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \neq 0$ et pour tout $2 \leq i \leq n$, $x_i \notin \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_{i-1})$. Si on a relation de dépendance $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = 0$, alors $\lambda_n = 0$ car sinon
$$x_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_{n-1} x_{n-1}) \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \cdots, x_{n-1}),$$
ce qui contredit les hypothèses. On a donc une relation de dépendance entre $x_1, \dots, x_{n-1}$, et comme par récurrence cette famille est libre, on en déduit que, pour tout i, les λ_i sont nuls. La famille est donc libre.

□

Proposition 46
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de F et $(y_1, \dots, y_m)$ une famille libre de G.
Alors, $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une famille libre de $F \oplus G$.

Preuve — Supposons $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 0$, alors

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = -(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m)$$

et ce vecteur appartient à $F \cap G$. F et G sont en somme directe, donc $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ et $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 0$. Les familles (x_i) et (y_i) sont libres donc tous les α_i et les β_i sont nuls, ce qui permet de conclure. □

Exemple - Famille échelonnée de polynômes

Définition 47
Soit $\{P_0, \dots, P_n\}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que cette famille est **échelonnée en degré** si $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n)$.

Proposition 48
Soit $\{P_0, \dots, P_n\}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré.
Alors cette famille est libre.

Exemple 49 —

1. *Ainsi, la famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *est une famille libre dans* $\mathbb{K}[X]$*, et dans* $\mathbb{K}_n[X]$*.*
   De même, la famille des $(X^k,\ k \geq 0)$ *est une famille libre.*
2. *La famille* $((X+1)^2, X^2+1, 2X)$ *n'est pas libre.*

4.2 Familles génératrices

Définition 50
Une partie $A \subset E$ est dite **génératrice** si $\mathrm{Vect}(A) = E$.
Dit autrement, une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire des $x_1, \dots, x_n$:
Pour tout $y \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$.

Exemple 51 —

1. *Pour* $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$*, la famille* $\big(e_1, \dots, e_n\big)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}^n$*.*
   En effet, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$*, alors* $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$*.*
   On peut de même remarquer que cette famille est libre.
2. *La famille* $(1, X, \dots, X^n)$ *est génératrice de* $K_n[X]$*.*
   En effet, pour P *un polynôme on* $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$*. Si* $\deg(P) \leq n$*, alors on a bien une combinaison linéaire des* $1, X, \dots, X^n$*.*
3. *Pour* E *le sous-ev des fonctions polynômiales de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, la famille* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, avec* $g_k : x \mapsto x^k$*, est génératrice de* E*.*
4. *Si on rajoute des vecteurs à une famille génératrice, elle reste génératrice.*

Proposition 52
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de F et $(y_1, \dots, y_m)$ une famille génératrice de G.
Alors $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration — On vérifie la définition de famille génératrice.

4.3 Bases

Définitions

Définition 53
Une **base** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une famille de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice.

Exemple 54 —

1. *La famille* $(1, i)$ *est une base de* $\mathbb{C}$ *comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
   La famille (1) *est une base de* $\mathbb{C}$ *comme* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*
2. *La famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *avec* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *est libre et génératrice de* $\mathbb{K}^n$*. C'est donc une base de* $\mathbb{K}^n$*.*
   On l'appelle la ***base canonique*** *de* $\mathbb{K}^n$*.*
3. *La famille* $(E_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ *est une base de l'e.v. des matrices* $n \times p$*,* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.*
   On l'appelle la ***base canonique*** *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.*
4. *On a également vu que la famille* $(1, X \ldots, X^n)$ *est libre et est génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$*. C'est donc une base de* $\mathbb{K}_n[X]$*.*
   On l'appelle la ***base canonique*** *de* $\mathbb{K}_n[X]$*.*
5. *La famille* $(1, X^1, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ *est une base (infinie) de* $\mathbb{K}[X]$*.*
   On l'appelle la ***base canonique*** *de* $\mathbb{K}[X]$*.*

Exemple 55 —

1. *La famille* $(x \mapsto \exp(3x))$ *est une base du sous-e.v. des solutions de l'EDL1* $y'(x) - 3y(x) = 0$*.*
2. *La famille* $(\cos, \sin)$ *est une base du sous-e.v. des solutions de l'EDL2* $y''(x) - y(x) = 0$*.*

Définition 56
Soit E un espace vectoriel admettant une base finie $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in E$.
On appelle **coordonnées du vecteur** u dans la base B le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Remarque 57 — *L'existence de ce* n*-uplet vient du fait que la famille est génératrice. L'unicité de ce* n*-uplet vient du fait qu'elle est libre :*
Supposons $(y_1, \ldots, y_n)$ *un autre* n*-uplet tel que* $u = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$*.*
En prenant la différence, on obtient $(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n = 0$*. Comme la famille est libre, cela implique, pour tout* $1 \leq i \leq n$*, que* $x_i = y_i$*.*

Caractérisation des bases

Proposition 58 (**Lemme de Steinitz**)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E, et $(f_1, \ldots, f_m)$ une famille de vecteurs de E qui est libre.
Alors, on a $m \leq n$.

Le lemme de Steinitz est la "clé de voûte" qui permet de définir la notion de dimension pour un espace vectoriel. Il simplifie énormément la recherche de bases mais aussi celle de familles libres et de familles génératrices.

Corollaire 59
Soit $n \geq 1$. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. qui possède une famille génératrice à n éléments.
Alors, toute base de E a au plus n éléments.
Soit F un $\mathbb{K}$-e.v. qui possède une famille libre à m éléments.
Alors, toute base de F a au plus m éléments.

Preuve — Une base de E est à la fois libre et génerarice. C'est une conséquence du Lemme de Steinitz. □

Corollaire 60 (**Familles libres qui sont des bases**)
Soit $n \geq 1$. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. qui possède une famille génératrice à n éléments.
Alors, toute famille de vecteurs de E qui est libre et a n éléments est une base de E.

Preuve — Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ libre. Par l'absurde, si cette famille n'est pas génératrice de E, alors il existe $f_{n+1} \in E \setminus Vect(f_1, \ldots, f_n)$.
D'après une proposition précédente, la famille $(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ est alors elle aussi libre. Mais, d'après la proposition

58, cette famille libre doit avoir au plus n vecteurs, contradiction.
Donc la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de E, donc c'est une base de E.s □

Exemple 61 —

1. *Définissons les vecteurs $f_1 = (1,2,0)$, $f_2 = (1,0,3)$ et $f_3 = (0,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$.*
   Ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3$ possède une base à 3 éléments, la famille (f_1, f_2, f_3) est donc elle aussi une base de $\mathbb{R}^3$.
2. *Deux vecteurs non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.*
   De même, trois vecteurs non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 62
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E.
Pour $1 \leq j \neq p$, soit $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ la décomposition du vecteur x_j dans la base E.
On définit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Cette matrice est appelée **la matrice de la famille** $(x_1, \dots, x_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$.

Remarque 63 — *La j-ème colonne C_j de la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ contient les coefficients de la décomposition du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 64 — *Pour $E = \mathbb{K}^2$, $\mathcal{B} = ((1,-1),(0,1))$, et $x_1 = (1,0), x_2 = (1,1), x_3 = (2,1)$, on a :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 65 — *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A, vues comme vecteurs colonne de $\mathbb{K}^n$.*
Alors, la matrice A est exactement la matrice de la famille de vecteurs $(C_1, \dots, C_p)$ dans la base banonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 66
Soit E un e.v. qui possède une base B avec n éléments. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Soit $M = Mat_B(u_1, \dots, u_n)$ la matrice de cette famille dans la base B.
Alors, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice M est inversible.

5 Dimension, espaces vectoriels de dimension finie

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 67
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de **dimension finie** si E possède une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments.
Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple 68 —

1. *L'e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.*
   On a vu précédemment que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ génère $\mathbb{K}^n$ (et en est une base).
2. *L'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.*
3. *L'e.v. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.*
4. *L'e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, il contient une famille infinie qui est libre : $(X^0, X^1, \dots)$. D'après la proposition 58, il ne peut donc pas avoir de famille génératrice finie (sinon, on aurait une contradiction).*

5. *On prouve de la même façon que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels distincts $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, la famille de fonctions $(x \mapsto e^{\alpha_1 x}, \ldots, x \mapsto e^{\alpha_n x})$ est libre. [Démonstration à faire, par récurrence]*

Théorème 69 (**Théorème de la base extraite**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $E \neq \{0\}$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E.
Alors, on peut extraire de cette famille une sous-famille $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_r})$ qui est une base de E.

Démonstration —Admis

Remarque 70 — *On a en fait de toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.*

Théorème 71
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $E \neq \{0\}$. Alors :

1. L'e.v. E admet une base finie.
2. Toute base de E a le même nombre déléments, n.

On dit alors que E est de **dimension** n sur $\mathbb{K}$.
On note cela $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, ou $\dim E = n$ si on connaît le corps $\mathbb{K}$.
Par convention, pour $E = \{0\}$ on pose $\dim E = 0$.

Preuve —

1. On utilise le théorème précédent.
2. Si $(e_1, \ldots, e_r)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E, alors $(e_1, \cdots, e_r)$ est une famille génératrice de E et $(e'_1, \cdots, e'_n)$ est une famille libre, la proposition 58 nous dit donc que $n \leq r$.
Comme $(e_1, \cdots, e_r)$ est libre et $(e'_1, \cdots, e'_n)$ est génératrice de E, on a de même $n \leq r$, ce qui donne $n = r$.

□

5.1 Exemples

Exemple 72 —

1. *On a* $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ *car* $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *en est une base.*
2. ***Attention !** : $\mathbb{C}$ est de dimension 1 en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais est de dimension 2 en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en effet, la famille $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$).*
Il est possible de montrer que $\mathbb{R}$ est de dimension infinie en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
3. *$\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$ car $(1, X^1, \ldots, X^n)$ en est une base.*
4. *L'espace de matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n.p$, car la famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ en est une base.*
5. *Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,2)$, $e_3 = (-1,0,2)$ et $e_4 = (0,1,1)$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice. On a $e_2 \notin \mathrm{vect}(e_1)$, $e_3 \in \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ et $e_4 \notin \mathrm{vect}(e_1, e_2)$.*
Donc, la famille (e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 73 —

- *La dimension d'un $\mathbb{K}$-ev E dépend aussi du corps $\mathbb{K}$. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1, mais c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, et un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.*
Changer de corps modifie l'allure des bases, ce qui modifie la dimension.
En général, on ne cherche pas à changer le corps $\mathbb{K}$ lorsque l'on étudie un e.v. E, pour éviter les confusions.
- *Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E est en bijection avec $\mathbb{K}^n$.*
En effet, pour $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et pour un vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$.
La fonction $f : x \in E \mapsto (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est ainsi une bijection entre E et $\mathbb{K}^n$.
Nous verrons dans le chapitre Applications Linéaires que le lien entre E et $\mathbb{K}^n$ est encore plus profond.

5.2 Caractérisation des bases en dimension finie

Proposition 74
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$(f_1, \cdots, f_n) \text{ est une base } \iff (f_1, \cdots, f_n) \text{ est libre } \iff (f_1, \cdots, f_n) \text{ est génératrice.}$$

Preuve —

- Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base, c'est une famille libre.
- Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre. Puisque E possède une famille génératrice à n éléments, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E, donc est génératrice.
- Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille génératrice. D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \ldots, e_m)$. Or le Théorème précédent nous dit que $m = n$, donc que $(e_1, \ldots, e_m)$ est la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ toute entière. C'est donc une base de E.

□

Exemple 75 — *Définissons la famille (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 = (1, 0, 2)$, $f_2 = (1, 1, 2)$ et $f_3 = (2, 0, 2)$. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $e_1 = f_3 - f_1$, $e_2 = f_2 - f_1$ et $e_3 = f_1 - \frac{1}{2}f_3$, donc la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.*
C'est donc une base puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

5.3 Théorème de la base incomplète

On a vu que d'une famille génératrice, on peut extraire une base. On étudie ici le processus inverse.

Théorème 76 (**Théorème de la base incomplète**)
Soient E un espace vectoriel, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E, et $(f_1, \ldots, f_m)$ une famille libre de E.
Alors, on peut complèter la famille $(f_1, \ldots, f_m)$ en une base $(f_1, \cdots, f_{m+p})$.
De plus, il est possible de choisir les vecteurs f_{m+1}, ..., f_{m+p} parmi les e_i.

Preuve — On applique l'algorithme suivant :

1. Si pour tout $1 \leq j \leq n$, $e_j \in \text{vect}(f_1, \ldots, f_m)$, alors $(f_1, \ldots, f_m)$ est génératrice, c'est donc une base et on a fini.
2. Sinon, soit j tel que $e_j \notin \text{vect}(f_1, \ldots, f_m)$, on pose $f_{m+1} = e_j$.
3. On recommence en remplaçant m par $m + 1$.

L'algorithme s'arrête après au plus n étapes. On obtient ainsi une famille $(f_1, \cdots, f_{m+p})$ libre et telle que tout vecteur de $(e_1, \ldots, e_n)$ est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_{m+p}$. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice, on obtient que la famille $(f_1, \cdots, f_{m+p})$ est génératrice aussi. C'est donc une base de E. □

Exemple 77 — *Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et soit $f_1 = (1, 1, 1)$.*
On a $e_1 \notin \text{vect}(f_1)$ et $e_2 \notin \text{vect}(f_1, e_1)$, donc (f_1, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.4 Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 78 (**Caractérisation de E et de $\{0\}$**)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. Le sous-ev F est de dimension finie, avec $\dim F \leq \dim E$.
2. On a $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.
3. On a $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0\}$.

Preuve —

1. Admis.
2. Supposons que $\dim F = \dim E$. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
   C'est une famille libre à n vecteurs dans E, donc c'est aussi une base de E.
   Ainsi, on a $F = Vect(f_1, \ldots, f_n) = E$.
   Réciproquement, si $F = E$, on a le résultat.
3. Par définition, on a $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0\}$.

□

Exemple 79 —

1. *Une droite vectorielle* $\mathbb{K}x_0$ *avec* $x_0 \neq 0$ *est de dimension* 1.
   Tout sous-espace vectoriel de dimension 1 *est une droite vectorielle. (de la forme* $Vect(x_0)$*).*
2. *Un plan vectoriel* $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v$*, avec* u *et* v *non colinéaires, est de dimension* 2.
   Tout sous-espace vectoriel de dimension 2 *est un plan vectoriel.*
3. *Dans* $E = \mathbb{R}^4$*, on pose* $F := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y=0 \text{ et } z+t=0\}$*. Alors* F *contient les vecteurs* $f_1 = (0,0,1,-1)$ *et* $f_2 = (1,-1,0,0)$ *donc* $\text{vect}\,(f_1,f_2) \subset F$.
   La famille (f_1,f_2) *est libre donc* $\dim F \geq 2$.
   De plus, si $(x,y,z,t) \in F$*, alors* $(x,y,z,t) = (x,-x,z,-z)$ *puisque* $x+y=0$ *et* $z+t=0$*, donc* $(x,y,z,t) = xf_1 + zf_2 \in \text{vect}\,(f_1,f_2)$.
   On en déduit que $F = \text{vect}\,(f_1,f_2)$ *et* $\dim F = 2$.

Proposition 80
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.
Si E possède une famille génératrice à m éléments, alors $\dim(E) \leq m$.
Si E possède une famille libre à k éléments, alors $\dim(E) \geq k$.

Démonstration —Sur feuille.

Corollaire 81
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1,\ldots,u_n \in E$.
Alors, on a $\dim(Vect(u_1,\ldots,u_n)) \leq n$.

Définition 82
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé **hyperplan** de E.

Exemple 83 — *Dans* $E = \mathbb{R}^4$*, soit* $G := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\}$*, alors les vecteurs* $(1,-1,0,0)$*,* $(1,0,-1,0)$ *et* $(1,0,0,-1)$ *forment une famille libre de* G*, donc* $\dim G \geq 3$*. Or* $G \neq \mathbb{R}^4$ *car* $(1,0,0,0) \notin G$*, donc* $\dim G \leq 3$*. On en déduit que* G *est de dimension* 3*, c'est un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$*. Une base de* G *est donnée par les vecteurs* $(1,-1,0,0)$*,* $(1,0,-1,0)$ *et* $(1,0,0,-1)$*.*

Proposition 84 (**Dimension d'un produit d'e.v.**)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, on a :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Preuve — En effet, si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, et $(f_1,\ldots,f_m)$ est une base de F, on vérifie facilement que la famille

$$((e_1,0),\cdots,(e_n,0),(0,f_1),\cdots,(0,f_m))$$

est libre et génératrice, donc une base de $E \times F$. □

Théorème 85 (**Formule de Grassmann**)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Ce résultat est extrêmement utile dans les calculs de dimension, car il relie entre elles les dimension de 4 e.v. différents. Si on connaît 3 de ces 4 dimensions, alors on obtient immédiatement la 4-ème. Cela est notamment utile lorsque l'on veut étudier $F+G$ et $F \cap G$: étudier l'un donne des informations sur l'autre.

Corollaire 86 (**Somme directe et dimension**)
Soit F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$F \oplus G \iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G.$$

Remarque 87 —

1. *De même, on a* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ *si et seulement si* $\dim(F_1 + \cdots + F_l) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_l$.
2. *L'intersection de deux plans vectoriels* F, G *distincts dans* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension* 1*, et on a* $F + G = \mathbb{R}^3$*. En effet, on a* $\dim(F+G) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$*, et* $\dim(F+G) > \dim(F) = 2$ *(car* F, G *sont distincts). Donc,* $\dim(F+G) = 3$*. On montre bien que*$F+G = \mathbb{R}^3$*.*
   En appliquant la formule de Grassman, on obtient que $\dim(F \cap G) = 2+2-3 = 1$.

Proposition 88 (**Existence d'un supplémentaire**)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.
Alors, tout sous-espace vectoriel F possède (au moins) un supplémentaire G dans E.
Tous les supplémentaires de F ont la même dimension, qui vaut $\dim(E) - \dim(F)$.

Preuve — Soit F un sous-espace vectoriel de base $(f_1, \dots, f_m)$, on complète cette famille libre en une base $(f_1, \dots, f_{m+p})$ de E par le théorème de la base incomplète.
Soit $G := \text{vect}(f_{m+1}, \dots, f_{m+p})$ alors F et G sont supplémentaires dans E. □

5.5 Rang d'une famille de vecteurs, calcul du rang

Définition 89
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v., et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E.
On définit le **rang** de la famille $(e_1, \cdots, e_l)$, noté $rg(e_1, \dots, e_n)$, par :

$$\text{rg}\,(e_1, \dots, e_l) = \dim \text{vect}(e_1, \dots, e_l).$$

Le rang de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est la dimension du sous-e.v. qu'elle engendre.

Proposition 90
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v., et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E.
Alors, on a $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq n$.
De plus, il y a égalité si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Preuve — Nous avons déjà vu la première inégalité.
La famille $(e_1, \dots, e_l)$ est génératrice de $\text{vect}(e_1, \dots, e_l)$. Donc $\dim \text{vect}(e_1, \dots, e_l) = l$ si et seulement si $(e_1, \dots, e_l)$ est une base, c'est-à-dire si et seulement si cette famille est libre. □

Corollaire 91
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$.
Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est de rang n si et seulement si c'est une base de E.

Proposition 92
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, et $e_1, \dots, e_m$ des vecteurs de E.
• Alors, on a $\text{rg}(e_1, \dots, e_m) \leq n$.
• Toute famille de vecteurs de E qui contient au moins $n + 1$ vecteurs est liée.

En général, quand les dimensions sont plus petites que $4, 5$, on peut calculer le rang d'une famille de vecteurs par encadrement (majorer et minorer la dimension, en trouvant des sous-familles libres ou des vecteurs qui sont combinaison linéaires à d'autres).
Dans le cas où la famille de vecteurs est libre, il suffit de résoudre l'équation $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m = 0$ pour le montrer, et donc calculer le rang.
Sinon, on peut calculer le rang de la famille $(e_1, \dots, e_m)$ en résolvant un système linéaire.

Calcul du rang

Méthode 93 (**Calcul d'un rang et système linéaire**) — *Soit E un e.v. de dimension n. Soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. Voici une manière de calculer le rang de cette famille.*

1. *On résout le système linéaire $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0$, d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.*
   Pour cela, on décomposera les vecteurs dans une base B de E (cela donne un système de n équations à p inconnues), et on appliquera la méthode du Pivot.
2. *L'ensemble des solutions S obtenu est un sous-e.v. de $\mathbb{K}^n$.*
   Cet ensemble est paramétré par un nombre r de variables.
   On peut alors écrire $S = Vect(y_1, \dots, y_r)$.
3. *Alors on a $rg(e_1, \dots, e_p) = p - r$.*
   De plus, avec les solutions $y_1, \dots, y_r$ on peut trouver r vecteurs de $(e_1, \dots, e_p)$ qui sont combinaison linéaire des $p - r$ autres.

Nous reverrons cette méthode dans le chapitre sur les applications linéaires, sous le nom de "Théorème du rang".

EXEMPLE 94 — *Prenons* $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (0, -1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1)$, $e_4 = (1, 2, 3)$, $e_5 = (2, 0, 2)$.
On résout l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_5 e_5 = 0$.
En regardant les coefficients, cela donne un système linéaire de 3 *équations à* 5 *inconnues.*
En utilisant la méthode du Pivot, on trouve comme solutions : $S = Vect((1, -1, -2, 1, 0), (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, 0, 1))$.
Ainsi on a $rg(e_1, \ldots, e_5) = \dim(Vect(e_1, \ldots, e_5)) = 5 - 2 = 3$.
On a aussi : $e_4 = -e_1 + e_2 - 2e_3$ *et* $e_5 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{4}{3}e_3$.
Cela donne $Vect(e_1, \ldots, e_5) = Vect(e_1, e_2, e_3)$.
La famille (e_1, e_2, e_3) *est la famille génératrice d'un sous-ev de dimension* 3. *C'est donc une base de ce sous-ev. Enfin, on a* $\dim(Vect(e_1, \ldots, e_5)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
Donc on a $Vect(e_1, \ldots, e_5) = \mathbb{R}^3$, *et* (e_1, e_2, e_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Définition d'un e.v., sous-e.v. Espaces vectoriels usuels (fonctions, $\mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, suites, $\mathbb{K}^n$).
  Savoir montrer qu'un ensemble F est un sous-e.v.
- Combinaison linéaire de vecteurs. Savoir calculer une combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel $Vect(x_1, \ldots, x_n)$ engendré par une famille. $Vect(x_1, \ldots, x_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de $x_1, \ldots, x_n$.
- Somme de sous-ev $F + G$.
  Somme directe de sous-e.v. $F \oplus G$, sous-e.v. supplémentaires dans E.
  F et G sont supplémentaires dans E ssi $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$. Savoir montrer que deux sous-e.v. sont en somme directe/supplémentaires.
- Familles libres, familles génératrices, bases.
  Savoir montrer qu'une famille est libre/génératrice/une base.
  Connaître les bases canoniques classiques : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Familles échelonnées de polynômes.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre. Une sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.
- Une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Dans une famille génératrice de E un vecteur qui est combinaison linéaire des autres peut être retiré : Dans $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, si x_{n+1} est combi. lin. des autres x_i alors $Vect(x_1, \ldots, x_n) = Vect(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$.
- Dimension d'un ev E (cas fini) : Toutes les bases de E ont le même cardinal.
  Dimension des ev usuels : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Pour un sous-ev F, on a $\dim(F) \leq \dim(E)$, et $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$, et $\dim(F) = 0$ ssi $F = \{0\}$.
- Théorème de la base incomplète : Toute famille libre se complète en une base.
  Théorème de la base extraite : De toute famille génératrice on peut extraire une base.
- Une famille de n vecteurs dans un ev de dimension n est une base de E ssi elle est libre ssi elle est génératrice de E.
  Savoir utiliser ce résultat pour déterminer plus rapidement si une famille est une base de E ou non.
- Décomposition des vecteurs dans une base.
  Savoir décomposer un vecteur dans une base B, réaliser des combinaisons linéaires.
  Savoir montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs via ses coefficients.
- Savoir calculer la dimension d'un ev (par les propriétés de la dimension, par le cardinal d'une base).
- Formule de Grassman (relie entre elles des dimensions). Savoir l'utiliser pour étudier $F + G$ et $F \cap G$.
  Dimension d'une somme directe $F \oplus G$. Savoir caractériser une somme directe avec les dimensions.
- Rang d'une famille de vecteurs : C'est la dimension du sous-ev engendré.
  Caractérisation des familles libres/génératrices/bases par leur rang.
- Savoir calculer un rang avec la méthode du Pivot.