

## « Petit » guide mathématique du futur étudiant de TSI-2

Vous trouverez ci-après une liste de compétences à acquérir pour que votre année de TSI-2 se passe le plus sereinement possible. Même si la liste est longue on s'est limité aux aspects les plus basiques, à peu de choses près.

En effet, on ne peut pas attendre d'un élève lambda qu'il maîtrise tout le cours de A à Z dans ses moindres détails et subtilités ni qu'il sache faire les exercices théoriques du type « Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists A$  etc. » .

Le but est plutôt que les formules, définitions et méthodes du cours soient apprises par cœur.

# 1 Calcul algébrique

## 1.1 Calculs de base

- Développer une expression
- Factoriser une expression
- Connaitre les identités remarquables (les bonnes formules, tant qu'à faire)
- Connaitre la formule du binôme de Newton
- Réduire au même dénominateur
- Connaitre ses tables de multiplications (non, ce n'est ni une plaisanterie, ni une insulte)
- Savoir faire des calculs simples sans utiliser la calculatrice (par exemple, des produits de petits entiers comme  $17 \times 8$ ).

## 1.2 Nombres complexes

- Effectuer le produit de deux nombres complexes ; identifier la partie réelle ou imaginaire sans effectuer tout le calcul.
- Exprimer sous forme algébrique ( $a + ib$ ) le quotient de deux nombres complexes en utilisant le conjugué du dénominateur
- Savoir passer de la forme exponentielle d'un complexe à sa forme algébrique et réciproquement
- Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe non nul.
- Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- Savoir ce qu'est une racine  $n$ -ième de l'unité ou d'un complexe non nul, et connaître les formules associées

## 1.3 Trigonométrie

- Connaitre les formules d'addition :  $\sin(a + b)$ ,  $\sin(a - b)$ ,  $\cos(a + b)$ ,  $\cos(a - b)$
- Connaitre les formules de duplication :  $\sin(2a)$ ,  $\cos(2a)$  (les 3 formules pour cette dernière)
- Connaitre les formules de linéarisation :  $\sin(a) \cos(b)$ ,  $\sin(a) \sin(b)$ ,  $\cos(a) \cos(b)$
- Connaitre les formules de factorisation :  $\cos(a) - \cos(b)$ ,  $\cos(a) + \cos(b)$ ,  $\sin(a) - \sin(b)$ ,  $\sin(a) + \sin(b)$
- Connaitre les expressions de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  en fonction de  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- Savoir résoudre des équations trigonométriques

## 2 Fonctions

### 2.1 Fonctions usuelles

- Connaitre les ensembles de définition, de dérivabilité (fonctions affines, fonctions polynomiales, racine carrée, inverse, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, tangente, cotangente, arcsinus, arccosinus, arctangente)
- Connaitre les propriétés éventuelles de parité, d'imparité, de périodicité de ces fonctions
- Connaitre l'allure générale des courbes représentatives (avec limites, variations, points remarquables, asymptotes)

### 2.2 Dérivation

- Connaitre les dérivées des fonctions usuelles
- Savoir que la dérivation est linéaire
- Savoir dériver un produit de fonctions
- Savoir dériver un quotient de fonctions
- Savoir dériver une composée, en particulier les fonctions du type  $\ln(u)$ ,  $\exp(u)$ ,  $\sqrt{u}$ ,  $\frac{1}{u}$ ,  $u^\alpha$
- Savoir ce qu'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- Connaitre la formule de Leibniz (dérivée n-ième d'un produit)
- Connaitre le théorème et l'inégalité des accroissements finis

### 2.3 Intégrales et primitives

- Connaitre les primitives des fonctions usuelles
- Savoir calculer une primitive en reconnaissant une forme particulière (par exemple :  $\frac{u'}{u}$ ,  $u'u^\alpha$ ,  $u'e^u$ , etc.)
- Connaitre le lien entre intégrale d'une fonction positive et aire
- Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Savoir effectuer un changement de variable dans une intégrale
- Savoir effectuer une intégration par parties
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction de la forme  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$
- Théorème de convergence des sommes de Riemann
- Connaitre la formule de Taylor avec reste intégrale

### 2.4 Équations différentielles

- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du première ordre (équation homogène + méthode de variation de la constante)
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (équation homogène avec équation caractéristique + solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme  $P(t)e^{\alpha t}$  avec  $P$  un polynôme)

## 2.5 Limites, équivalents, développement limités

- Connaitre les limites classiques du cours, notamment celles des fonctions usuelles et celles données par le théorème des croissances comparées
- Connaitre le théorème des gendarmes
- Connaitre les équivalents usuels en 0 :  
 $\ln(1+x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $1 - \cos(x)$ ,  $(1+x)^\alpha - 1$ ,  $e^x - 1$ ,  $\tan(x)$ ,  $\arctan(x)$
- Connaitre les développements limités usuels en 0
- Savoir calculer un développement limité
- Savoir calculer une limite notamment à l'aide des développements limités, des équivalents

## 3 Suites

### 3.1 Suites arithmétiques et géométriques

- Connaitre la définition précise de telles suites
- Connaitre l'expression du terme général de telles suites à partir du premier terme et de la raison
- Connaitre la somme de termes consécutifs de telles suites

### 3.2 Étude de suites

- Savoir calculer les premiers termes d'une suite quelle que soit le type de définition (formule explicite ou par récurrence).
- À partir d'une expression de  $u_n$ , savoir écrire ce que vaut  $u_{n+1}$  (en particulier, on a  $u_{n+1} \neq u_n + 1$  en général)
- Savoir montrer qu'une suite est croissante, décroissante ou constante
- Savoir montrer qu'une suite converge à l'aide des théorèmes du cours (gendarmes, toute suite croissante majorée converge, toute suite décroissante minorée converge, théorème des suites adjacentes)
- Savoir calculer la limite d'une suite en utilisant les équivalents et les développements limités

### 3.3 Raisonnement par récurrence

- Savoir quand utiliser les différents types de récurrence (simple, double ou forte)
- Savoir rédiger clairement la proposition  $\mathcal{P}(n)$  à démontrer
- Savoir mener une preuve par récurrence dans des cas simples (démonstration d'une formule ou d'une inégalité par exemple)

### 3.4 Factorielle

- Savoir ce que signifie  $n!$

- Bien écrire les expressions avec des factorielles en n'hésitant pas à utiliser des parenthèses (ex : l'écriture  $n + 1!$  est assez ambiguë)
- NE PAS écrire de fausses formules (ex :  $(n + p)! \neq n! + p!$ )
- si  $u_n = (2n)!$  alors  $u_{n+1} \neq (2n + 1)!$  mais  $u_n = (2(n + 1)!) = (2n + 2)!$

## 4 Polynômes

### 4.1 Racines d'un polynôme

- Savoir ce qu'est la multiplicité d'une racine et comment la caractériser à l'aide des dérivées successives
- Savoir qu'un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Savoir que tout polynôme non constant à coefficients complexes est scindé sur  $\mathbb{C}$
- Savoir que si un polynôme admet plus de racines que son degré (en particulier, une infinité) alors ce polynôme est nul
- Savoir factoriser un polynôme connaissant ses racines.
- Savoir que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes, alors  $a$  et  $b$  sont les racines du polynôme  $X^2 - sX + p = 0$  avec  $s = \alpha + \beta$  et  $p = \alpha\beta$

### 4.2 Opérations sur les polynômes

- Savoir déterminer le degré et le coefficient dominant d'une expression polynomiale plus ou moins compliquée (somme et produit)
- Savoir effectuer une division euclidienne sur un exemple concret
- Savoir que si  $P$  est un polynôme alors  $P(X + 1)$  n'est pas le produit de  $P$  par  $X + 1$  mais une simple composée

## 5 Algèbre linéaire

### 5.1 Espaces vectoriels

- Connaître des exemples d'espaces vectoriels
- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu
- Savoir ce qu'est la somme de sous-espaces vectoriels
- Savoir ce que sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et savoir montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

### 5.2 Familles de vecteurs

- Savoir ce qu'est une combinaison linéaire
- Savoir montrer qu'une famille est libre, génératrice, une base

- Connaitre des exemples de familles libres (notamment les familles échelonnées de polynômes)
- Savoir décrire un ensemble du type  $Vect(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et qu'un tel ensemble est un espace vectoriel

### 5.3 Systèmes linéaires

- Savoir résoudre un système linéaire avec la méthode par combinaison
- Savoir déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  défini à l'aide d'un système d'équations

### 5.4 Dimension finie

- Savoir ce qu'est un espace vectoriel de dimension finie
- Connaitre la dimension des espaces vectoriels vus en cours ( $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ )
- Savoir utiliser le théorème du rang (pour une application linéaire ou une matrice)
- Connaitre la formule de Grassmann

### 5.5 Applications linéaires

- Savoir montrer qu'une application est linéaire, un endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire.
- Savoir que l'injectivité d'une application linéaire équivaut au fait que son noyau soit réduit au vecteur nul.
- Savoir que si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels **de même dimension finie** et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire, alors les caractères injectif, surjectif et bijectif de  $f$  sont équivalents.

### 5.6 Matrices

- Savoir effectuer un produit de matrices et connaître la condition de compatibilité pour effectuer un tel produit (vis à vis du nombre de lignes et de colonnes)
- Savoir que le produit matriciel **N'EST PAS** commutatif
- Connaitre la formule du binôme de Newton pour les matrices et une condition d'application de celle-ci (vis-à-vis de la commutativité)
- Connaitre la définition de l'inverse d'une matrice carrée (quand celle-ci existe) et des conditions d'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre  $n$  (le rang est égal à  $n$ , les vecteurs colonnes, ou lignes, forment une base de  $\mathbb{K}^n$ )
- Savoir calculer l'inverse d'une matrice inversible.
- Savoir que si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors toute matrice de  $f$  dans des bases données possède  $n$  lignes et  $p$  colonnes où  $n = \dim(F)$  et  $p = \dim(E)$

- Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données (en dimension finie nécessairement)
- Savoir que le produit matriciel correspond à la composition d'applications linéaires
- Connaitre les formules de changement de base (pour un vecteur et pour une matrice)

## 6 Géométrie

### 6.1 Géométrie du plan

- Savoir déterminer un vecteur directeur ou normal d'une droite
- Savoir déterminer un vecteur orthogonal non nul à un vecteur donné
- Savoir déterminer une équation de droite

### 6.2 Géométrie de l'espace

- Savoir manipuler le produit vectoriel et utiliser ses propriétés
- Savoir déterminer un vecteur normal d'un plan
- Savoir déterminer une équation de plan

## 7 Probabilités sur un ensemble fini

### 7.1 Généralités

- Savoir que la probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1
- Savoir que la somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire vaut 1
- Savoir traduire les données d'un énoncé en termes de probabilités
- Savoir calculer la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité
- Savoir construire un arbre de probabilités
- Savoir utiliser un arbre de probabilités pour des calculs

### 7.2 Probabilités conditionnelles

- Savoir calculer une probabilité conditionnelle
- Connaitre la formule des probabilités totales
- Connaitre la formule de Bayes
- Connaitre la formule des probabilités composées
- Connaitre les lois classiques ainsi que l'espérance et la variance associée, du moins savoir les retrouver rapidement (loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale)
- Savoir donner la loi d'une variable aléatoire et calculer son espérance et sa variance

### 7.3 Lois de probabilité et variables aléatoires

- Connaitre les lois classiques ainsi que l'espérance et la variance associée, du moins savoir les retrouver rapidement (loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale)
- Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire et calculer son espérance et sa variance