Chapitre 14 - Intégration

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Introduction

Nous avons déjà manipulé des intégrales pour réaliser des calculs. L'objectif principal de ce chapitre est de définir mathématiquement la notion d'intégrale pour fonction continue sur un segment, qu'elle soit à valeurs réelles ou complexes.
Il découlera de cette définition les propriétés élémentaires de l'intégrale que nous avions admis au premier semestre et qui nous permettrons d'avoir une compréhension plus forte des ces objets.
Nous développerons enfin une formule, appelée *formule de Taylor avec reste intégral*, généralisant la formule bien connue :

$$\text{Si f est dérivable sur un segment [a,b], alors : } \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

dont les applications sont nombreuses.

2 Fonctions en escaliers

2.1 Subdivision d'un segment

DÉFINITION 1 (**Subdivision**)
*Une **subdivision** d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est une famille de réels $(a_0, \ldots, a_n)$ qui vérifie :*
$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$.
*On appelle **pas** de la subdivision $(a_k)_k$ l'écart maximum entre deux termes consécutifs :* $max_{0 \leq k \leq n-1}(a_{k+1} - a_k)$.
On dit que la subdivision $(a_k)_k$ est de pas régulier si les écarts $a_{k-1} - a_k$ sont tous égaux (égaux à $\frac{b-a}{n}$).
*Le **support d'une subdivision** σ est l'ensemble de ses termes :* $\{a_0, \ldots, a_n\}$.

EXEMPLE 2 — *La famille* $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1))$ *est une subdivision du segment* $[0, 1]$.

2.2 Fonctions en escalier

DÉFINITION 3 (**Fonction en escalier/constante par morceaux**)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
*On dit que f est **en escalier** s'il existe une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ telle que :*

$$f \text{ est constante sur }]a_k, a_{k+1}[, \ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

*On dit alors que la subdivision $(a_k)_k$ est **adaptée** à f.*
L'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ est noté $\mathcal{E}sc\,([a, b], \mathbb{R})$.

EXEMPLE 4 — *La fonction partie entière restreinte à l'intervalle $[0, 3]$ est une fonction en escalier.*
La subdivision $(0, 1, 2, 3)$ est adaptée à cette fonction.

REMARQUE 5 — *Les fonctions en escalier sont aussi appelées **fonctions constantes par morceaux**. Ce sont des fonctions f définies sur un intervalle I, pour lesquelles il existe un découpage de I en intervalles $I_1, \ldots, I_n$ tels que f est constante sur chaque intervalle I_k.*

PROPOSITION 6
Soient f, g sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.
Alors il existe une subdivision $(a_k)_k$ adaptée à f et à g.
Démonstration — *On prend $(b_k)_k$ une subdivision adaptée à f, $(c_k)_k$ une subdivision adaptée à g. La réunion $U = \{b_k, k\} \cup \{c_k,\ k\}$ est un ensemble fini. On peut donc dénombrer ses éléments :*

$U = \{a_1, \dots, a_n\}$. Cela donne une subdivision adaptée à f et à g.

PROPOSITION 7
Soient f, g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions $f+g$, $\lambda.f$, fg, $|f|$ sont en escalier sur $[a,b]$.
En particulier, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un $\mathbb{R}$-e.v.
Démonstration — *On utilise les définitions de fonction en escalier et de sous-e.v.*

EXERCICE 1 — *Montrer que l'ensemble des fonctions en escaliers sur un segment donné $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.*

EXERCICE 2 — *Montrer que pour f et g deux fonctions en escaliers sur $[a,b]$, les fonction $sup(f,g)$ et $inf(f,g)$ sont en escalier sur $[a,b]$.*

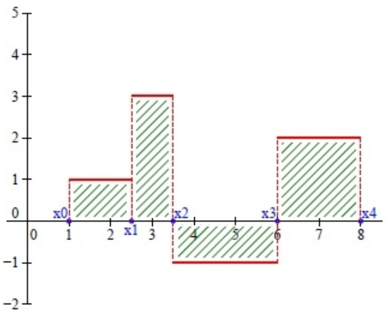
2.3 Intégration des fonctions en escalier

THÉORÈME 8 (**Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier**)
Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Soit $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ une subdivision adaptée à $[a,b]$. Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on pose y_k la valeur de f sur le segment $]a_k, a_k+1[$.
*On définit alors **l'intégrale de f sur** $[a,b]$, notée $\int\limits_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f(t)ft$, comme le nombre :*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \times (a_{k+1} - a_k).$$

De plus, cette valeur est indépendante de la subdivision adaptée choisie.

Cette quantité représente l'aire algébrique délimitée par l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$, et par le graphe de f. Comme f est une fonction en escaliers, cette aire est une somme d'aires de rectangles (affectées d'un signe).
Démonstration — *Admis.*



Intégrale d'une fonction constante par morceaux.

EXEMPLE 9 — *La valeur de l'intégrale $\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\lfloor x \rfloor\right) dx$ est $\sqrt{2}+1$.*

EXERCICE 3 — *Montrer que l'intégrale sur $[a,b]$ de la fonction nulle vaut 0.*

REMARQUE 10 — *Qu'est-ce que l'intégrale sur $[a,b]$?*
L'intégrale sur $[a,b]$ est une fonction.

Cette fonction est définie sur un ensemble de fonctions (pour le moment les fonctions en escalier sur $[a, b]$), et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
C'est la fonction : $f \in Esc([a, b], \mathbb{R}) \mapsto \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}$. Il faut différencier le principe de l'intégrale (cette façon d'associer un nombre à une fonction) de l'intégrale de a à b de $f(t)dt$ (la valeur numérique qu'on obtient).

Cette différence est identique à la différence entre fonction dérivée f' et nombre dérivé en a, $f'(a)$.
Ou bien à fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$ et valeur du polynôme en x, $P(x)$.

2.4 Propriétés de l'intégrale

La proposition suivante montre que l'intégrale d'une fonction en escalier est "linéaire" (qu'elle se comporte bien avec les sommes et les multiplications par une constante).

Proposition 11
Soient f, g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\int_a^b (\lambda.f + \mu.g)(t)dt = \lambda. \int_a^b f(t)dt + \mu. \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration — *On écrit l'intégrale comme une somme, et on utilise les propriétés de la somme.*

L'intégrale se comporte bien avec la relation d'ordre (et le signe) :

Proposition 12 (**Positivité de l'intégrale**)
Soit f est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
Si on a $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
Démonstration — *On utilise la définition de l'intégrale.*

Risque d'erreur

La réciproque de la proposition précédente est fausse.
L'intégrale d'une fonction g sur $[a, b]$ peut être nulle alors que la fonction g n'est pas nulle.
Par exemple, on a $\int\limits_{-1}^{2} [x]dx = 0$.

L'intégrale d'une fonction en escalier préserve l'ordre entre fonctions :

Proposition 13 (**Intégrale et inégalités**)
Soient f, g deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$.
Si on a $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
Démonstration — *La fonction $g-f$ est positive, ce qui permet d'utiliser la proposition précédente.*

Proposition 14 (**Inégalité triangulaire pour les intégrales**)
Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Alors, on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f(t)dt \right| \leq \int_{[a,b]} |f(t)|dt.$$

Démonstration — *On utilise l'inégalité triangulaire pour les nombres réels.*

Proposition 15 (**Relation de Chasles**)
Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$.
Alors les fonctions $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ et $f : [c, b] \to \mathbb{R}$ sont en escalier. Et, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration — *On choisit une subdivision adaptée, et on écrirt la définition de chacune des intégrales.*

Application à la Physique

Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escaliers, le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est la ***valeur moyenne*** *prise par la fonction f sur le segment $[a, b]$.*
Cela a vraiment le sens de la valeur que prend "en moyenne" la fonction f sur le segment $[a, b]$ (le sens intuitif, ainsi que le sens probabiliste).

Remarque 16 — *Soit $C \in \mathbb{R}$ une constante.*
On a $C = \frac{1}{b-a}\int_a^b C.dt$.
Cela permet d'écrire une constante comme une intégrale, et de factoriser avec des intégrales. Par exemple, on a $\int_a^b f(t)dt - C = \int_a^b (f(t) - C\frac{1}{b-a})dt$.

3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

3.1 Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Proposition 17
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que :

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \epsilon, \forall x \in [a, b]$$

Démonstration —*Admis (Hors programme). Cela est lié à la notion de fonction uniformément continue.*

Théorème 18 (**Approximation des fonction continues par des fonctions en escaliers**)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors, on a :

1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\varphi_\epsilon \in \mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{R})$ telle que :*

$$|f - \varphi_\epsilon| \leq \epsilon \text{ sur } [a, b].$$

2. *Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telle que :*

$$sup\left(\{f(x) - \varphi_n(x),\, x \in [a, b]\}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration — *On utilise la définition de la continuité, et des bons choix de fonctions en escalier. Voir dessin.*

3.2 Intégrale d'une fonction continue

Le théorème d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier aussi proches que l'on veut (à ϵ près, pour tout $\epsilon > 0$) nous permet de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

Théorème 19 (**Définition de l'intégrale d'une fonction continue**)
Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escalier telle que sup $(\{f(x) - \varphi_n(x), x \in [a, b]\}) \underset{n\to}{\longrightarrow}$ $(\star)$. Alors :

1. *La suite d'intégrales $(\int_a^b \varphi_n(t)dt)_n$ est* ***convergente****.*
2. *La limite de cette suite ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escaliers (φ_n) qui vérifient la condition $(\star)$.*

*On appelle alors l'**intégrale de f**, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f(t)dt$, le nombre :*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

Démonstration — *Admis. (Hors programme)*

Application à la Physique

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
*On appelle **valeur moyenne de** f **sur** $[a, b]$ l'intégrale :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

La puissance moyenne fournie par un système mécanique durant un temps $T > 0$ se mesure à l'aide de la valeur moyenne d'une intégrale :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt.$$

Avec comme relation : $P(t) = \dfrac{dE(t)}{dt}$ (E désignant l'énergie fournie par le système)

3.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition 20 (**Linéarité de l'intégrale**)
Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\int_a^b (\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\int_a^b f + \mu.\int_a^b g.$$

Démonstration — *On utilise la définition de l'intégrale pour les fonctions continues, et les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escaliers.*

Proposition 21 (**Positivité de l'intégrale**)
Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors on a $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
Si $f \geq g$ sur $[a, b]$, alors on a $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration —*On utilise la définition de l'intégrale pour les fonctions continues, et les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escaliers.*

PROPOSITION 22
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f \geq 0$.
Si f n'est pas la fonction nulle, alors :

$$\int_a^b f(t)dt > 0.$$

Autrement dit, pour $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et positive, on a :

$$\int_a^b g(t)dt = 0 \Longrightarrow g = 0.$$

Démonstration — *Admis.*

La seule fonction <u>continue</u> qui est positive et d'intégrale nulle est la fonction nulle.

EXERCICE 4 — *On pose $f : x \mapsto \ln(1+\sin^3(x))$ définie sur $[0, \pi]$, et $I = \displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$. Déterminer le signe de I.*

PROPOSITION 23 (**Inégalité triangulaire et intégrale**)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Démonstration — *On utilise l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$ et les propriétés de l'intégrale.*

PROPOSITION 24 (**Relation de Chasles**)
Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors, on a :

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,c]} f(t)dt + \int_{[b,c]} f(t)dt.$$

Démonstration — *On utilise la définition de l'intégrale pour les fonctions continues, et la relation de Chasles pour l'intégrale de fonctions en escaliers.*

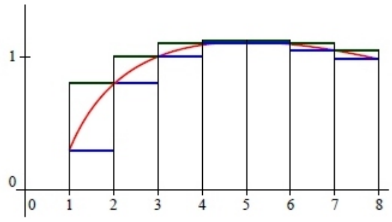
4 Sommes de Riemann

DÉFINITION 25 (**Sommes de Riemann à gauche et à droite**)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Soit n un entier strictement positif.
*On définit les **sommes de Riemann** associées à f sur $[a, b]$, par :*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

La somme $S_n(f)$ est la somme de Riemann à gauche.
la somme $S'_n(f)$ est la somme de Riemann à droite.

Les sommes de Riemann d'une fonction continue ont une propriété très importante : elles convergent vers la valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \inf_a^b f(t)dt$.
Cela fournit une méthode rapide pour estimer/approcher la valeur de $\int_a^b f(t)dt$.
Ces sommes sont liées à la **méthode d'approximation par des rectangles** (on approche f par des fonctions en escalier particulières).



Sommes de Riemann à gauche et à droite.

Proposition 26
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Alors les suites $(S_n(f))_n$ et $(S'_n(f))_n$ sont convergentes, et leur limite vaut $\int_a^b f(t)dt$.
Autrement dit, on a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \to_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)dt,$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \to_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration —*Admis.*

Les sommes de Riemann permettent de calculer la limite de certaines suites. Pour une suite $(u_n)_n$, si on trouve une fonction f continue et un intervalle $[a,b]$ tels que $u_n = S_n(f)$ ou $S'_n(f)$, alors on sait automatiquement que $(u_n)_n$ est convergente, et que sa limite est $\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 5 — *Soit u la suite définie pour tout $n \geq 1$ par*

$$u_n = \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

Déterminer la limite de u.

5 Calcul intégral

Jusqu'à présent nous avons manipulé des intégrales sur des intervalles et toutes les intégrales étaient de la forme $\displaystyle\int_a^b f$ où $a < b$. On adopte maintenant la convention suivante :

Définition 27 (**Permutation des bornes**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On définit l'intégrale de f entre b et a par :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Dans le cas où $b = a$, l'intégrale de f entre a et a vaut 0 : $\int_a^a f(t)dt = 0$.

La relation de Chasles reste vraie avec cette généralisation : Pour I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et $a, b, c \in I$ (pas forcément ordonnés), on a : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)ft$.

5.1 Primitives et intégrales

Définition 28 (**Primitive d'une fonction**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
*On dit que F est **une primitive** de f si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Le théorème suivant est ausi connu sous le nom de *théorème fondamental de l'analyse.* Il relie l'intégrale d'une fonction avec une primitive de la fonction intégrée et assure l'existence de primitive pour toute fonction continue.

THÉORÈME 29 (**Existence de primitive**)
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in [a, b]$.
Alors la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est une primitive de f.
De plus, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
Démonstration — *On doit montrer que F est dérivable, et que $F'(x) = f(x)$. Puis, il faut montrer l'unicité.*

REMARQUE 30 — *On rappelle que les primitives d'une fonction f ne diffèrent que d'une constante. (Si F est une primitive de f, alors $F + r$ aussi, pour $r \in \mathbb{R}$ constant.)*

COROLLAIRE 31
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f. Alors, on a :

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Le corollaire précédent donne une méthode de calcul des intégrales, que vous connaissez déjà. Dès que l'on possède une primitive d'une fonction on peut calculer l'intégrale de cette fonction sur un intervalle donné.

COROLLAIRE 32 (**Théorème de Newton-Leibniz**)
Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_{a}^{b} f'(t)dt.$$

5.2 Propriétés calculatoires

PROPOSITION 33 (**Intégration par parties (IPP)**)
Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors, on a :

$$\int_{a}^{b} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(t)v(t)dt$$

Démonstration —*Preuve déjà vue au chapitre Primitives et équations différentielles.*

La formule d'intégration par parties (qui découle de $(uv)' = u'v + uv'$) permet de calculer la primitive de beaucoup de fonctions qui s'écrivent comme un produit $u.v'$.
Elle est très utile pour des fonctions de la forme $x \mapsto x^n.g(x)$, si on sait primitiver la fonction g. On peut alors utiliser l'IPP pour dériver x^n et primitiver g. On répète alors l'opération n fois, afin que le terme polynômial devienne de degré 0.

EXERCICE 6 —

1. *Montrer $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty$.*

3. Calculer une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer une primitive de $x \mapsto x^2\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 34 (**Primitive de composées usuelles**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On a :

1. *Pour tout $\alpha > 0$, on a $\int_a^b \alpha f'(t)f(t)^{\alpha-1}dt = [f(t)^\alpha]_a^b$.*
2. *Si f ne s'annule pas, alors $\int_a^b \frac{-f'(t)}{f(t)^2}dt = [\frac{1}{f(t)}]_a^b$.*
3. *Si f ne s'annule pas, alors $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = [\ln(|f(t)|)]_a^b$.*

Démonstration —*La dérivée de la fonction à droite est la fonction à gauche (dérivée d'une composée). On applique alors le théorème de Newton-Leibniz.*

PROPOSITION 35 (**Changement de variables**)
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est continue, et que u est de classe C^1 avec $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx.$$

Démonstration —*On utilise le théorème de Newton-Leibniz pour chaque intégrale.*

Cette égalité est appelée la **formule de changement de variables**. On passe de la variable t à la variable $x = u(t)$.

EXEMPLE 36 — *Une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ est $t \mapsto \dfrac{\ln^2 t}{2}$.*

EXERCICE 7 — *À l'aide du changement de variable $u : t \mapsto \cos t$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^3(x)\cos^4(x)$.*
En utilisant la relation entre $\sin^2$ et $\cos^2$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)^7\cos(x)^{15}$.

6 Formule de Taylor avec reste intégral

THÉORÈME 37 (**Formule de Taylor avec reste intégral**)
Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt,$$ *$R_n(x)$ est appelé le reste de Taylor à l'ordre n en x de f*

Démonstration —*Cette formule se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.*

Cette formule de Taylor avec reste intégral permet d'approcher l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ grâce aux dérivées de f.
Les termes dans la somme sont exactement les mêmes que ceux dans la formule de Taylor pour les polynômes. Le cas des polynômes est un cas particulier (celui où le reste de Taylor est nul si $n = \deg(P)$).
On utilisera en général le corollaire suivant.

THÉORÈME 38 (**Inégalité de Taylor-Lagrange**)
Soient $n \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Soit $M > 0$ tel que $|f^{n+1}(x)| \leq M$, $\forall x \in I$. Alors, on a :

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \forall x \in [a,b].$$

Démonstration — *Sur feuille.*

7 Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes

7.1 Définition

DÉFINITION 39 (**Intégrale d'une fonction à valeurs complexes**)
*Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit **l'intégrale de f sur** $[a,b]$ comme le nombre complexe :*

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b]} Re(f(t))dt + i \times \int_{[a,b]} Im(f(t))dt.$$

EXEMPLE 40 — *Soit* $\begin{array}{rccc} f: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \cos(t)e^{it} \end{array}$ *, une fonction à valeurs complexes.*
La fonction f est continue et son intégrale sur $[0,2\pi]$ vaut :

$$\int_{[0,2\pi]} f(t)dt = \int_{[0,2\pi]} \cos^2(t)dt + i \int_{[0,2\pi]} \cos t \sin t dt.$$

EXERCICE 8 — *Calculer la valeur de $\int_{[0,2\pi]} f(t)dt$, où f est la fonction de l'exemple précédent.*

7.2 Propriétés calculatoires

THÉORÈME 41 (**Linéarité de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes**)
Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs complexes, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

1. *On a* $\int_{[a,b]} \lambda f(t)dt = \lambda \int_{[a,b]} f(t)dt$
2. *On a* $\int_{[a,b]} (f+g)(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt + \int_{[a,b]} g(t)dt$

Démonstration —*En exercice.*

THÉORÈME 42 (**Inégalité triangulaire pour l'intégrale complexe**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, à valeurs compelxes. Alors, on a :

$$|\int_{[a,b]} f(t)dt| \leq \int_{[a,b]} |f(t)dt|.$$

Démonstration —*En exercice.*

EXERCICE 9 — *Soit f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
Montrer que :

$$|\int_{[a,b]} fg(t)dt|^2 \leq \left(\int_{[a,b]} |f(t)|^2 dt\right) \times \left(\int_{[a,b]} |g(t)|^2 dt\right)$$

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- *Comprendre la notion d'intégrale d'une fonction : L'intégrale de a à b de f est un nombre réel.*
  Notion géométrique d'aire (avec signe) sous la courbe de f. Exemple des fonctions en escalier.
- *Pour toutes les fonctions f continues sur $[a,b]$, le nombre $\int_a^b f(t)dt$ existe.*
- *L'intégrale de a à b est linéaire. Relation de Chasles entre intégrales sur $[a,c],[c,b],[a,b]$.*
  Inégalité triangulaire : $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. L'intégrale est positive : Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- *La seule fonction continue et positive d'intégrale nulle sur $[a,b]$ est la fonction nulle.*
  Savoir utiliser les résultats précédents pour comparer des intégrales (signes, encadrement), ou pour montrer que la fonction f est la fonction nulle.
- *Sommes de Riemann : Définition, convergence. Savoir utiliser les sommes de Riemann pour déterminer la limite de certaines suites $(u_n)_n$.*
- *Permuter les bornes d'une intégrale change son signe.*
- *Si f est continue, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 et est une primitive de f.*
  Théorème de Newton-Leibniz : $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.
- *Méthodes d'intégration par parties et de changement de variables.*
  Savoir utiliser les méthodes et résultats pour calculer la valeurs d'intégrales.
- *Formule de Taylor-Lagrange, qui relie f et ses dérivées en un point.*
- *Définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ à partir de $Re(f)$ et $Im(f)$. Extension de certaines propriétés au cas complexe (linéarité, inégalité triangulaire, lien avec les primitives).*