Chapitre 0
Logique et raisonnement

Table des matières

Vidal AGNIEL

Notations usuelles en logique mathématique

$\forall$	"pour tout"
$\exists$	"il existe"
$\in$	"appartenant à"
$\subset$	"inclus dans"
$\Rightarrow$	"implique"
$\Leftrightarrow$	"équivalent à"
$\vert$	"tel que"
,	"on a"/"avec"/"tel que" (selon le contexte)

1 Variables et quantificateurs

Définition 1
Une **proposition** est une phrase mathématique qui est soit **vraie**, soit **fausse**.

En mathématiques, on utilise des **variables**. Il s'agit de lettres (x, y, a, n, α, β, ...) qui ont parfois des indices (x_1, x_2, ...). Une variable ne désigne pas un objet particulier mais des objets appartenant à un certain ensemble.

Les objets mathématiques que nous utilisons se conçoivent dans trois grandes familles : les **ensembles** ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}[X], M_n(\mathbb{R}), \ldots$), les **nombres et éléments** d'un ensemble (entiers, rationnels, réels, vecteurs, matrices, ...), les **fonctions** (dérivées, suites, polynômes, séries, ...).

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables. La **valeur de vérité** de la proposition (vraie ou fausse) peut alors être donnée lorsque l'on précise les **valeurs** des variables. En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x.

1.1 Quelques règles de calcul pour les propositions

PROPOSITION 2
Soient P, Q et R des propositions. On a :
- $non(non\, P) \;\equiv\; P$,
- $non(P\ et\ Q) \;\equiv\; (non\, P)\ ou\ (non\, Q)$,
- $non(P\ ou\ Q) \;\equiv\; (non\, P)\ et\ (non\, Q)$,
- $P\ et\ (Q\ ou\ R) \;\equiv\; (P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)$,
- $P\ ou\ (Q\ et\ R) \;\equiv\; (P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)$,
- La proposition « $P\ et\ (non\, P)$ » est toujours fausse,
- La proposition « $P\ ou\ (non\, P)$ » est toujours vraie : soit P est vraie, soit $non(P)$ est vraie.

Preuve — On peut démontrer ces propriétés avec des tables de vérité. Donnons un exemple.

P	Q	P et Q	$non(P\ et\ Q)$	$non(P)$	$non(Q)$	$non(P)\ ou\ non(Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Donc $non(P\ et\ Q) \;\equiv\; non(P)\ ou\ non(Q)$. □

1.2 Implication

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Rightarrow Q$ » est la proposition qui est
- fausse lorsque P est vraie et Q est fausse,
- vraie dans les autres cas.

REMARQUE 3 — *Lorsque « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on dit que*
- *P est une* ***condition suffisante*** *pour Q,*
- *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour P.*

DÉFINITION 4
- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la* ***réciproque*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ » s'appelle la* ***contraposée*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

PROPOSITION 5 (**Implication et contraposée**)
On a $P \Rightarrow Q \;\equiv\; (non\, Q) \Rightarrow (non P)$.

1.3 Équivalence

Soient P et Q des propositions. La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (se lit « P équivalent à Q » ou « P si et seulement si Q ») est la proposition qui est
- vraie lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses,
- fausse dans les autres cas.

PROPOSITION 6 (**Equivalence et double-implication**)
On a $P \Leftrightarrow Q \;\equiv\; (P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)$.

1.4 Quantificateurs

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

DÉFINITION 7 (**Quantificateur "pour tout"**)
Le quantificateur $\forall$ (se lit « pour tout » ou « quel que soit ») permet de définir la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » qui est :
- vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,

- fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** un élément x de E).

Définition 8 (**Quantificateur "il existe"**)
Le quantificateur $\exists$ (se lit « il existe ») permet de définir la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » (« il existe … tel que ») qui est :

- vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,
- fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.

Après ces deux quantificateurs, il faut toujours préciser l'ensemble où on prend notre variable : « $\forall x$, $x(1-x) \geq 0$ » n'a pas de sens (pour tout x dans quoi ?).
« $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \geq 0$ » est fausse, mais « $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \geq 0$ » est vraie.

Attention ! Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations**, ils ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

Proposition 9 (**Négation et quantificateurs**)
On a :

- $non(\forall\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \exists\, x \in E,\ non(P(x))$,
- $non(\exists\, x \in E,\ P(x)) \ \equiv\ \forall\, x \in E,\ non(P(x))$.

Attention ! Dans une proposition, on ne peut pas échanger les positions de $\forall$ et $\exists$.

Par exemple, "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $3y-4=x$" est une proposition qui est vraie. Mais, "$\exists y \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $3y-4=x$" est une proposition qui est fausse.

2 Méthodes de démonstration - Exemples, raisonnements classiques

Un **raisonnement mathématique** est un processus permettant d'établir, à partir de propositions vraies, de nouvelles propositions, de nouveaux résultats, en utilisant des principes logiques. Dans cette partie, nous étudions différents types de raisonnement.

Lorsque l'on écrit une proposition mathématique, il est sous-entendu qu'elle est vraie.
Sinon, on ne l'écrit pas.

2.1 Vocabulaire

Une proposition s'énonce souvent sous la forme « Si A alors B » ($A \Rightarrow B$).

- La proposition A regroupe les **hypothèses** .
- La proposition B regroupe les **conclusions** .

2.2 Quelques exemples de rédaction

Quand on dit « **Supposons** P », on part de l'hypothèse que P est vraie.

Pour bien rédiger en mathématiques, on doit respecter certaines règles.

- On doit introduire les nouveaux objets.
  — Pour introduire une variable x qui représente un **élément quelconque** d'un ensemble E, on peut écrire :
  « *Soit* $x \in E$ » ou « *Soit x un élément de E* ».
  — Pour donner un nom, par exemple M, à une quantité connue ou à un objet que l'on va souvent utiliser, on peut écrire :
  « ***Posons*** $M = \ldots$ » ou « ***Notons*** $M = \ldots$ » (ou « On pose $M = \ldots$, On note $M = \ldots$ »).
  Par exemple, « *Posons* $M = \dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ ».
- On doit mettre des liens logiques entre les arguments, comme par exemple :

— « **Donc** » , « **D'où** », « **Ainsi** » ,
— « **On en déduit que** »,
— « **Or** » (permet d'ajouter un argument),
— « **Finalement** » (pour une conlusion à la fin du raisonnement), ...

- On peut annoncer ce que l'on veut faire. Cela aide a bien clarifier l'objectif.
  « ***Montrons que*** ... », « On veut montrer que ... ».

EXEMPLES 10

- *On veut montrer la proposition » $\forall x \in E,\ P(x)$ ».*
  On pose x un élément quelconque de E et on montre que $P(x)$ est vraie.
  Exemple de rédaction :
  Soit $x \in E$. Montrons que $P(x)$ est vraie.
  $\vdots$
  Donc $P(x)$.
  Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $P(x)$.
- *On veut montrer la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ ». En général, on trouve explicitement un élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ est vraie. Le raisonnement peut se faire par **analyse - synthèse**.*
- *On veut montrer qu'un $x \in E$ qui vérifie $P(x)$ doit être unique.*
  On suppose qu'il en existe deux et on montre qu'ils sont égaux.
- *On veut montrer une inclusion $A \subset B$. On prend un élément quelconque x dans A, on montre que x est dans B.*
- *On veut montrer une égalité d'ensembles $A = B$. Souvent, on procède par **double inclusion** : on montre $A \subset B$ puis on montre $B \subset A$.*
- *On veut montrer une implication « $P \Longrightarrow Q$ ». On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie. S'il n'y a pas besoin de faire d'autres hypothèses/méthode de démonstration, on parle alors de **raisonnement direct**.*
- *On veut montrer une équivalence « $P \Longleftrightarrow Q$ ». Souvent, on procède par **double implication** : on montre d'abord « $P \Longrightarrow Q$ » puis on montre « $Q \Longrightarrow P$ ».*
- *On veut montrer la proposition « P ou Q ». On peut montrer l'implication « $non(P) \Longrightarrow Q$ ».*

Rappelons que pour prouver qu'une proposition P est fausse, on peut montrer que sa négation $non(P)$ est vraie. Par exemple, pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on peut montrer que sa négation « $\exists\, x \in E,\ non(P(x))$ »
est vraie. Donner un élément x_0 de E tel que $non(P(x_0))$ est vraie s'appelle un **contre-exemple** .

Attention ! Lorsque l'on utilise la flèche « $\Leftrightarrow$ », il faut être sûr que le sens direct ($\Rightarrow$) et le sens réciproque ($\Leftarrow$) soient vrais.

REMARQUE 11 (**Utiliser une implication**) — *Dans un exercice, pour appliquer un théorème de la forme $A \Rightarrow B$ (« Si A alors B »), on commence donc par vérifier que A (les hypothèses) est vraie. On écrit par exemple*

« On a A. D'après le théorème ..., on sait que A implique B. Donc on a B »

EXEMPLES 12 (Exemples de rédaction de preuves)

- ***Démontrons*** *que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall n \in \mathbb{Z},\ (n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair})$ ».

  Preuve *: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que si n est pair alors n^2 est pair.*
  *Supposons n pair. Nous allons montrer que n^2 est pair par **raisonnement direct***
  Par hypothèse, n est pair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{Z}$.
  Donc n est pair.
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.

- *Démontrons que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.*
  Il s'agit de la proposition « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big)$. »

Preuve : *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons, par* ***double implication****, que $(a+b)^2 = a^2+b^2$ si et seulement si $a=0$ ou $b=0$.*

▷ *Supposons que $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Montrons que $a=0$ ou $b=0$.*
On sait que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et, par hypothèse, $(a+b)^2 = a^2+b^2$. Donc

$$a^2+2ab+b^2 = a^2+b^2.$$

Donc, $2ab=0$, c'est-à-dire $ab=0$. Donc $a=0$ ou $b=0$.
Donc si $(a+b)^2 = a^2+b^2$ alors $a=0$ ou $b=0$.

◁ *Réciproquement, supposons $a=0$ ou $b=0$. Montrons que $(a+b)^2 = a^2+b^2$.*
$a=0$ ou $b=0$, dans les deux cas, on a $ab=0$ et donc $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = a^2+b^2$.
Donc si $a=0$ ou $b=0$ alors $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

- *Démontrons que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.*

  Preuve : *Donnons un* ***contre-exemple****.*
  Pour $n=3$, on a $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Il existe donc un entier naturel n tel que $2^n \leq n^2$. Donc la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.

- *Démontrons l'égalité d'ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+2 \leq 2\} = [-1,0]$.*

  Preuve : *Procédons par* ***double inclusion****.*
  • *Montrons que $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+2 \leq 2\} \subset [-1,0]$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2+x+2 \leq 2$, alors $x^2+x \leq 0$, donc $x \leq -x^2 \leq 0$. On a donc $x \leq 0$ et $x(x+1) \leq 0$ donc $x+1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$. Finalement, $-1 \leq x \leq 0$.*
  • *Montrons que $[-1,0] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+2 \leq 2\}$. Soit $x \in [-1,0]$. Alors $x^2+x+2 = x(x+1)+2 \leq 2$ car $x \leq 0$ et $x+1 \geq 0$.*
  Par double inclusion, on a donc l'égalité.

2.3 Raisonnements classiques

Nous avons déjà mentionné et fait des exemples pour :

- Le **raisonnement direct** : Pour montrer qu'on a « $P \Rightarrow Q$ », on suppose que P est vraie, et on utilise directement des calculs/théorèmes pour obtenir que Q est vraie.
- Le **contre-exemple** : Pour montrer que « $P \Rightarrow Q$ » est fausse, on cherche un cas de figure (un nombre entier n, un nombre réel x, une fonction f) dans lequel P est vraie et Q est fausse.
- La **double-implication** : Pour montrer qu'on a « $P \Leftrightarrow Q$ », on montre d'une part que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, et réciproquement que « $P \Leftarrow Q$ » est vraie. En général, l'une des implications est bien plus facile que l'autre.
- La **double-inclusion** : Pour montrer qu'on a $E = F$ (pour E, F des ensembles), on montre d'une part que $E \subset F$, et réciproquement que $F \subset E$. En général, l'une des inclusions est bien plus facile que l'autre.

Raisonnement par contraposée (ou par contraposition)

Pour montrer que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on peut montrer que sa contraposée, qui est la proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ », est vraie. On parle de **raisonnement par contraposée** .

Exemple 13 — *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair.*

Cette proposition s'écrit « $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) ».

Preuve : *Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
Plutôt que de montrer « n^2 pair $\Rightarrow$ n pair », on montre la contraposée « n impair $\Rightarrow$ n^2 impair », plus facile à démontrer.
Supposons que n est impair. *Nous allons montrer que n^2 est impair.*
Par hypothèse, n est impair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. On a donc

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1,$$

et $2k^2+2k \in \mathbb{Z}$. Donc n^2 est impair.
Donc si n est impair alors n^2 est impair. On en déduit par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.

Raisonnement par l'absurde

On souhaite démontrer qu'une proposition P est vraie. Le **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer que P est fausse, c'est-à-dire à supposer que $non(P)$ est vraie et montrer que cela conduit à une contradiction. On en déduit alors que P est vraie.

EXEMPLE 14 — *Démontrons que $\sqrt{2}$ est un **nombre irrationnel**[1] .*

Preuve *: Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, **premiers entre eux**[2], tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.*
On a donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est pair. Or, nous avons vu à l'exemple 13 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair. Donc p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On a donc $p^2 = 4k^2$, puis $2q^2 = 4k^2$. Donc finalement, $q^2 = 2k^2$. On en déduit que q^2 est pair. Donc, comme précédemment, q est pair.
*On en déduit que 2 **divise** p et 2 divise q. Ceci est **absurde** car cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux !*
Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Raisonnement par disjonction de cas

Le **raisonnement par disjonction de cas** permet de simplifier un raisonnement en distinguant toutes les situations possibles. Cela est notamment utilisé lorsque la proposition dépend d'une variable x.

EXEMPLE 15 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier naturel.*

Preuve *: Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n(n+1)$ est divisible par 2.*
- *1^{er} cas : n est pair. Alors $n(n+1)$ est pair.*
- *2^{nd} cas : n est impair. Alors $n+1$ est pair et donc $n(n+1)$ est pair.*

Donc, dans tous les cas, $n(n+1)$ est divisible par 2.
Montrons maintenant que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
- *1^{er} cas : n est un multiple de 3. Alors $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.*
- *$2^{ème}$ cas : $n+1$ est un multiple de 3. Alors $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.*
- *$3^{ème}$ cas : $n-1$ est un multiple de 3. Alors $2n+1 = 2(n-1)+3$ est un multiple de 3, et donc $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.*

Donc, dans tous les cas, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.
Ainsi $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 3 et par 2. Or 2 et 3 sont premiers entre eux donc $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Démontrer **par récurrence** que la proposition « $\forall n \geq n_0,\ P(n)$ » est vraie repose sur le principe suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) ET pour tout $n \geq n_0$, « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (**hérédité**), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

REMARQUE 16 — *En général, n_0 vaut 0, 1 ou 2.*

On peut donc, par exemple, rédiger un raisonnement par récurrence comme suit :

1. L'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ce sont les nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels
2. Si un entier naturel d divise p et divise q alors $d = 1$

« *Démontrons le résultat par récurrence. Notons, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ la propriété "...... "* »

- Initialisation : *Vérifions $P(n_0)$ (ce n_0 est à déterminer en fonction de l'énoncé et la vérification est souvent facile.)*

  $\vdots$

  D'où $P(n_0)$.
- Hérédité : *Soit $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$. Dans cette étape, on va utiliser la propriété $P(n)$, qui est l'**hypothèse de récurrence** .*

  $\vdots$

  D'où $P(n+1)$.

Par récurrence, on en déduit donc que, pour tout $n \geq n_0$, on a $P(n)$.

REMARQUE 17 — ***Attention :*** *Il est très important de démarrer l'hérédité au même entier n_0 que l'initialisation. Si on montre $P(0)$ et pour tout $n \geq 1$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, cela ne montre pas que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.*

EXEMPLE 18 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence sur n. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété :*

$$\text{«} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{»}.$$

- *Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. D'où $P(1)$.*
- *Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.*
  On a
  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1).$$
  Donc d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$,
  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
  D'où $P(n+1)$.

Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Le principe que l'on vient de détailler est appelé une **récurrence simple** : on déduit $P(n+1)$ directement de $P(n)$. Parfois, on ne peut déduire $P(n+2)$ que de $P(n+1)$ et $P(n)$. On parle alors de **récurrence double** . Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $\Big(P(n)$ et $P(n+1)\Big) \Rightarrow P(n+2)$ » est vraie (*hérédité*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

EXEMPLE 19 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la **suite** définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 3, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Preuve : *Démontrons le résultat par récurrence sur n. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété :*

$$« u_n = 1 + 2^n ».$$

- *Initialisation : On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.*
- *Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$, montrons $P(n+2)$.*
  On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, donc par hypothèses de récurrence,

  $$u_{n+2} = 3 \times (1 + 2^{n+1}) - 2 \times (1 + 2^n) = 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} = 1 + 2 \times 2^{n+1} = 1 + 2^{n+2}.$$

  D'où $P(n+2)$.

Par récurrence, on a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Enfin, il arrive que $P(n+1)$ ne puisse se déduire que de $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ..., $P(n)$. On parle alors de **récurrence forte** . Le principe est le suivant :

Si $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ET pour tout $n \geq n_0$, la proposition « $\Big(P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et ... et $P(n)\Big) \Rightarrow P(n+1)$ » est vraie (*hérédité*), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Cette somme s'appelle une **somme géométrique**.

Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on veut chercher les solutions d'un problème et montrer que celles que l'on a trouvées sont les seules, on utilise le raisonnement par **analyse-synthèse**.

Ce raisonnement s'effectue en deux étapes :

1. *Analyse* : On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche des propriétés vérifiées par cette solution.
2. *Synthèse :* Parmi les éléments vérifiant les propriétés obtenues dans l'analyse, on détermine ceux qui sont bien solutions du problème (il n'y en a pas d'autres).

On obtient ainsi l'ensemble des solutions du problème.

Ce raisonnement est particulièrement utile pour démontrer l'**existence** et l'**unicité** d'une solution à un problème.
Cependant, c'est le raisonnement le plus difficile à utiliser car c'est le plus élaboré (il faut trouver les bonnes propriétés lors de la phase d'analyse pour pouvoir bien conclure avec la synthèse).
Pour un raisonnement par l'absurde, par contraposée, par récurrence, on sait ce que l'on doit obtenir (on connaît le "résultat" auquel on doit aboutir), alors que pour une analyse-synthèse on ne sait pas ce que l'on doit obtenir (et il faudra trouver le "résultat", en plus d'y aboutir).

Exemple 20 — *Déterminons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Preuve : *Raisonnons par analyse-synthèse.*
• *Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 2 - x - f(x)$. Donc $f(x) = 2 - f(0) - x$.
Donc f est de la forme $f(x) = a - x$ où $a \in \mathbb{R}$.

• *Synthèse : Déterminons parmi les fonctions de la forme $x \longmapsto a - x$ celles qui vérifient la condition de l'énoncé. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \longmapsto a - x$.*
On a

$$f(y - f(x)) = f(y - (a - x)) = f(y + x - a) = a - (y + x - a) = 2a - x - y.$$

Donc f vérifie la condition de l'énoncé si et seulement si $2a = 2$, soit encore si et seulement si $a = 1$.
• *Conclusion : Il existe donc une unique fonction vérifiant la condition de l'énoncé, c'est la fonction $x \longmapsto 1 - x$.*