Chapitre 20
Séries numériques

Table des matières

Vidal AGNIEL

Introduction

Pour une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$, la notion qui nous intéresse le plus est la convergence : quand on prend n aussi grand que l'on veut, comment se comporte le terme v_n ?
C'est cette notion de convergence qui donne beaucoup de résultats mathématiques, et qui est aussi utilisée dans certaines structures en analyse (continuité, dérivabilité).
Pour une série, au lieu de prendre des nombres u_n et de regarder leur comportement, on considère les sommes $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et on regarde leur comportement.
Une **série est une suite** de sommes, où pour chaque indice suivant on rajoute un terme à la somme.

1 Série, convergence, somme

1.1 Séries convergentes, sommes

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite réelle.*
On définit la ***série de terme général*** u_n *comme la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$*, avec* $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
Le nombre S_n *est appelé* ***somme partielle*** *de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$.
En général, on note $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n = (S_n)_{n\geq n_0}$.

Remarque 2 — *En général les séries sont définies à partir de 0* ($n_0 = 0$)*, ou à partir de 1.*
Attention ! *L'expression* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *désigne la série de terme général* u_n*, cela désigne une suite (et pas un nombre réel). Nous définirons par la suite le nombre réel* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ *(s'il existe), et il ne faudra pas confondre les deux notations.*

Exemple 3 — *La série de terme général* $\frac{1}{n^2}$ *(pour* $n \geq 1$*) est définie par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.
Attention à ne pas confondre u_n *et* S_n.
Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *sont* $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \dfrac{1}{9}$.
Ceux de la série $(S_n)_{n\geq 1}$ *sont* $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{49}{36}$.

Définition 4 (**Convergence de séries, somme**)
Soit $(S_n)_{n\geq n_0}$ *la série de terme général* u_n.
On dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est* ***convergente*** *si la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *est convergente.*
Et, la ***somme de la série*** $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est la limite de la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$*, notée* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est ***divergente***.
On définit la ***nature*** *d'une série comme l'information sur sa convergence ou divergence.*

Remarque 5 — ***Attention !*** *La convergence de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et celle de la série* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *ne sont pas du tout la même chose !*
Ces deux suites ont des liens entre elles (on le verra par la suite), mais il faut bien voir que ce

sont deux suites différentes.

Attention ! *La somme* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ *d'une série convergente est définie comme la limite d'une suite.*
Une somme infinie est définie comme la limite d'une suite de sommes finies.
Nous verrons comment manipuler ces sommes infinies, mais cela ne se fait pas aussi facilement que les sommes finies. Principalement car il faut vérifier à chaque fois que la série associée est convergente.
Quand vous êtes en face d'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$*, il faut toujours commencer par étudier la convergence de celle-ci (voir si la suite des sommes partielles* $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ *convege ou non).*

Exemple 6 — *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, posons* $u_n = \dfrac{1}{10^n}$*, et étudions la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$*.*
On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{10^k} = \dfrac{\frac{1}{10^{n+1}} - 1}{\frac{1}{10} - 1}$*.*
Comme $(\frac{1}{10})^n \to_{n\to+\infty} 0$*, on obtient donc que la somme partielle* S_n *converge vers* $\dfrac{0-1}{\frac{1}{10}-1} = \dfrac{10}{9}$*.*
On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente, et sa somme vaut* $\dfrac{10}{9}$*.*
Ainsi : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{10}{9}$*.*

Exemple 7 — *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, posons* $v_n = 2 - \frac{1}{n}$*. Alors la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *est convergente, de limite* 2*.*
Regardons la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$*.*
Pour tout $k \geq 1$ *on a* $v_k \geq 1$*, donc* $\sum_{k=1}^{n} v_k \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$*.*
D'après le théorème de comparaison, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} v_k)_{n\geq 1}$ *diverge vers* $+\infty$*.*
La série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *est divergente vers* $+\infty$*.*
On écrira parfois : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty$*.*

Remarque 8 (Relation de récurrence) —
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite, et soit* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *la suite des sommes partielles de la série associée.*
Alors, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty [\![$*, on a* $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$*.*
La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ *est construite comme une suite récurrente, là où la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *ne l'est pas forcément.*

Exemple 9 — *Il est bien plus facile de montrer qu'une série est convergente que de calculer sa limite. Souvent, on saura que la série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est convergente, mais sans pouvoir calculer autrement la valeur de cette série.*
Posons par exemple, pour $n \geq 0$*,* $u_n = \frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$*.*

On a $u_n \geq 0$*, donc la relation* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k$ *implique que la suite des sommes partielles* $(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geq 0}$ *est une suite croissante.*

De plus, on a $u_n < \frac{1}{10^n}$*, donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}} - 1}{\frac{1}{10} - 1} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$.

La suite des sommes partielles $(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geq 0}$ *est donc majorée.*

Une suite croissante majorée est convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

Mais, on ne sait pas calculer la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$*. (on sait seulement que c'est un réel compris entre* 0 *et* $\frac{10}{9}$*)*

Remarque 10 — *Pour une série* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *convergente, on pourra abréger cela en CV.*
Pour une série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n$ *divergente, on pourra abréger cela en DV.*

En analyse, les équivalents et les DL sont des outils qui permettent d'étudier la "vitesse" à laquelle une fonction/suite varie.
Nous allons faire de même pour les séries. Si une série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, à quelle "vitesse" converge-t-elle vers sa limite (sa somme) ?

Définition 11 (**Reste d'une série convergente**)
Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série convergente.*

Pour tout $n \geq n_0$*, on définit le* ***reste d'indice*** n *de la série par* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - S_n$.

On le note aussi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Le reste d'indice n *de la série est la différence entre la somme de la série et la somme partielle* S_n.

Proposition 12
Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série convergente.*
Alors la suite $(R_n)_{n\geq n_0}$ *des restes de la série converge vers* 0.

Démonstration — On a $R_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - S_n$. Comme la somme partielle S_n converge $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$, la différence entre ces deux quantités tend vers 0. □

Pour trouver la "vitesse de convergence" de la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$, il faut trouver un équivalent des restes R_n.

Exemple 13 — *Pour la série de terme général* $\frac{1}{10^n}$*, qui est convergente, de somme* $\frac{10}{9}$*, son reste d'indice* n *vaut* $R_n = \frac{10}{9} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k}$.

On peut calculer ici une valeur exacte de R_n :

$$R_n = \frac{10}{9} - \frac{(\frac{1}{10})^{n+1} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{10}{9} - \frac{10}{9}((\frac{1}{10})^{n+1} - 1) = \frac{10}{9}\frac{1}{10^{n+1}}.$$

Ainsi, on connaît la "vitesse" à laquelle la série converge vers sa somme.
Ici, la vitesse de convergence est très rapide. Pour $n = 9$, l'écart entre la somme partielle et la somme de la série est de l'ordre de $\frac{1}{10^{10}}$. En calculant la somme des 9 premiers termes de la série, on a une approximation de sa somme (de sa limite) à 10^{-10} près.

Proposition 14
Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente et $(R_n)_{n \geq n_0}$ la suite des restes de la série.

Pour tout $n \geq n_0$, on a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k$.

Démonstration — Soient $n \geq n_0$ et $m \geq n+1$. On a $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = S_m - S_n$. Comme la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ est convergente, si l'on fixe n on a $S_m - S_n \to_{m \to +\infty} S - S_n = R_n$. □

Contrairement à la somme partielle S_n qui est une somme, le reste R_n est la limite d'une somme. Souvent, lorsque l'on cherche un encadrement ou un équivalent de R_n, on se ramène à une somme en posant $m \geq n+1$ et en étudiant $\sum_{k=n+1}^{m} u_k$. Puis, on regarde la limite quand m vers $+\infty$.

1.2 Séries à termes positifs

Les méthodes d'étude que nous verrons dépendent du type de la série étudiée.
Dans ce cours, nous allons voir deux grandes familles de suites : les séries à termes positifs, et les séries absolument convergentes.

Définition 15 (**Série à termes positifs**)
Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série.
*On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **à termes positifs** si pour tout $n \in [\![n_0, +\infty [\![$ on a $u_n \geq 0$.*

Nous étudierons beaucoup des séries à termes positifs. Elles sont plus pratiques à étudier car on ne se préocuppe pas du signe de u_n, et car ces séries sont croissantes.

Proposition 16 (**Convergence d'une série à termes positifs**)
Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.
Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée.
Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration — Pour tout $n \geq n_0$, on a $S_{n+1} = u_{n+1} + S_n$.
Comme tous les u_k sont positifs, on en déduit que $S_{n+1} \geq S_n$. La suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est donc croissante.
Or, une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée, et elle diverge vers $+\infty$ sinon. □

1.3 Séries absolument convergentes

Comme les séries à termes positifs sont plus faciles à étudier, nous définissons les séries absolument convergentes, qui reposent sur cela.

DÉFINITION 17 (**Série absolument convergente**)
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série.*
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est* ***absolument convergente*** *si la série* $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ *converge.*
On abrège cela en AC.

PROPOSITION 18
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série absolument convergente.*
Alors, la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est convergente.*

Démonstration — Pour $n \geq n_0$ on pose $v_n = \max(0, u_n)$ et $w_n = -\min(0, u_n)$. A l'aide d'une disjonction de cas selon le signe de u_n, on montre que v_n et w_n sont positifs, que $u_n = v_n - w_n$, et que $|u_n| = v_n + w_n$.
On a donc $v_n \leq |u_n|$, donc $\sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|$. La série de terme général v_n est ainsi une série à termes positifs majorée, donc elle est CV. De même, on a $\sum_{k=n_0}^{n} w_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|$, donc la série de terme général w_n est CV.
Enfin, on a $\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} v_k - \sum_{k=n_0}^{n} w_k$. La série de terme général u_n est donc CV comme différence de deux suites CV. □

REMARQUE 19 — ***Attention !*** *la réciproque est fausse.*
Nous verrons un contre-exemple par la suite. (la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$*)*

2 Propriétés des séries et de leur somme

2.1 Linéarité de la somme

PROPOSITION 20
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série convergente. Alors, son terme général* u_n *converge vers* 0.

Démonstration — Posons $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Par convergence de la série, S_n et S_{n-1} tendent vers S quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout $n \geq n_0 + 1$ on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Donc, $u_n \to_{n\to+\infty} S - S = 0$. □

REMARQUE 21 — ***Attention !*** *La réciproque est fausse.*
Nous verrons un contre-exemple avec la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

EXEMPLE 22 — *On utilise surtout la contraposée de ce critère : Si le terme général* u_n *ne tend pas vers* 0*, alors la série* $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est divergente.*
Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ *ne converge pas.*

PROPOSITION 23 (**Linéarité de la somme**)
Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$, $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *deux séries convergentes, et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. *La série* $\sum_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$ *est convergente, et* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$.
2. *La série* $\sum_{n \geq n_0} \lambda u_n$ *est convergente, et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration — Cela découle des propriétés des suites convergentes (la somme de suites CV est CV, le multiple d'une suite CV est CV) et de la limite (la limite de la somme est la somme des limites, la limite d'un multiple est le multiple de la limite). □

Remarque 24 — ***Attention !*** *On peut ajouter deux séries convergentes entre elles, mais on ne peut pas déouper une série convergente en deux morceaux sans précautions.*
Par exemple, en prenant $u_n = \frac{1}{10^n}$, *on a vu que la série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge.*
On peut bien écrire $u_n = 2 + \frac{1}{10^n} - 2$, *mais les séries* $\sum_{n \geq 0} (2 + \frac{1}{10^n})$ *et* $\sum_{n \geq 0} -2$ *sont divergentes.*
(on a rajouté et soustrait un terme de série divergente)

Proposition 25
Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *deux séries, avec l'une convergente et l'autre divergente.*
Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n + v_n$ *est divergente.*

Démonstration — Considérons $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergente. Si l'on suppose que la somme de ces deux séries est convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} v_n = (\sum_{n \geq n_0} u_n + v_n) - \sum_{n \geq n_0} u_n$ serait convergente, ce qui est absurde. Cette somme est donc divergente. □

2.2 Théorème de comparaison

Proposition 26 (**Théorème de comparaison**)
Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *des séries à termes positifs, telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang* n_1.

- *Si la série* $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *est aussi convergente.*
- *Si la série* $\sum_{n \geq n_0} u_n$ *diverge vers* $+\infty$, *alors la série* $\sum_{n \geq n_0} v_n$ *diverge vers* $+\infty$.

Démonstration — Supposons $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergente. Pour tout $n \geq n_1$, on a alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{k=n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{k=n} v_k \leq \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{+\infty} v_k.$$

La suite des sommes partielles est donc majorée à partir d'un certain rang. Donc cette suite est majorée.
La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est donc à termes positifs et majorée, donc elle est convergente.
Supposons maintenant $\sum_{n \geq n_0} u_n$ divergente. Comme la série est à termes positifs, cela veut dire que la suite de ses sommes partielles est non-majorée.
Soit $M > 0$ un réel. Alors il existe $n \geq n_1$ tel que $\sum_{k=0}^{n} u_k \geq M + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.

Cela s'écrit aussi $\sum_{k=n_1}^{n} u_k \geq M$. Donc, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} v_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} v_k + \sum_{k=n_1}^{k=n} v_k \geq \sum_{k=n_0}^{n_1-1} v_k + \sum_{k=n_1}^{k=n} u_k \geq \sum_{k=n_0}^{n_1-1} v_k + M \geq M.$$

La suite des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^{n} v_k$ est donc non-majorée, donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est divergente.

□

Nous avons utilisé implicitement ce résultat pour démontrer que la série des $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$ est convergente. Son terme général est positif et est majoré par $\frac{1}{10^n}$, qui est le terme général d'une série convergente.

2.3 Comparaison série-intégrale

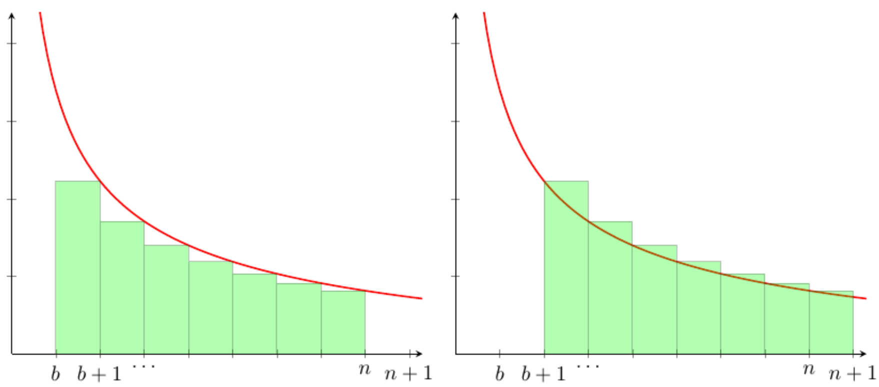
Théorème 27 (**Critère de comparaison série-intégrale**)
Soient $a \in \mathbb{N}$, et $f : [a, +\infty[$ une fonction positive, continue, et décroissante.
Pour $n \in [\![a, +\infty[\![$, on pose $u_n = f(n)$.
• *Pour tout $n \in [\![a+1, +\infty[\![$, on a :*

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)dt \quad \textit{(\textbf{Méthode des rectangles})}$$

• *Pour tous $b \in [\![a+1, +\infty[\![$ et $n \in [\![b, +\infty[\![$, on a :*

$$\int_{b}^{n} f(t)dt \geq \sum_{k=b+1}^{n} f(k) \geq \int_{b+1}^{n+1} f(t)dt, \quad \textit{(\textbf{Comparaison série-intégrale})}.$$

• *La série $\sum_{n \geq a} u_n$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*



Comparaison série-intégrale. Majoration (à gauche) et minoration (à droite) de $\sum_{k=b+1}^{n} f(k)$.

Démonstration — On utilise les propriétés de l'intégrale.
Comme la fonction f est décroissante sur $[a, +\infty[$, pour tout $t \leq n$ on a $f(t) \geq f(n)$. D'où $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq \int_{n-1}^{n} f(n).dt = f(n).1$.
Aussi, pour tout $t \in [n, +\infty[$, on a $f(t) \leq f(n)$. D'où $\int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq \int_{n}^{n+1} f(n).dt = f(n).1$.
Une fois l'encadrement par la méthode des rectangles démontré, utilisons-le.

On a alors : $\sum_{k=b+1}^{n} u_k = \sum_{k=b+1}^{n} f(k)$. Or,

$$\int_{b}^{n} f(t)dt = \sum_{k=b+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \geq \sum_{k=b+1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=b+1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt = \int_{b+1}^{n+1} f(t)dt.$$

Ainsi :

$$\int_b^n f(t)dt \geq \sum_{k=b}^{n} u_k \geq \int_{b+1}^{n+1} f(t)dt.$$

Alors, si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ (la primitive de f qui s'annule en a) a une limite finie L en $+\infty$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ est majorée par $f(a)+L$, donc est convergente (série à termes positifs majorée).
Réciproquement, supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ est CV, de somme S. Soit $x \in [a,+\infty[$. Posons $n = \lfloor x \rfloor$.

On a $\displaystyle\int_a^x f(x)dx \leq \int_a^{n+1} f(x)dx = \int_a^{a+1} f(x)dx + \int_{a+1}^{n+1} f(x)dx \leq \int_a^{a+1} f(x)dx + \sum_{k=a+1}^{n+1} f(k)$.

Donc, $\displaystyle\int_a^x f(x)dx \leq \int_a^{a+1} f(x)dx + S_n - f(a) \leq \int_a^{a+1} f(x)dx + S - f(a)$.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est croissante majorée sur $[a,+\infty[$, donc elle admet une limite finie en $+\infty$. □

Exemple 28 — *Pour la série de terme général* $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ *(pour* $n \geq 2$*), en posant* $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$*, on remarque que* $\frac{1}{n\ln(n)} = f(n)$ *et que la fonction* f *est continue, positive, et décroissante sur* $[2,+\infty[$*. Ainsi, la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ *a donc la même nature que la suite* $(\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}\ dt)_{n\geq 2}$.
La comparaison série-intégrale fournit :
$\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}dx.$
La fonction f *est de la forme* $\frac{u'}{u}$*, avec* $u(t) = \ln(t)$*. Une primitive est donc* $t \mapsto \ln(\ln(t))$*.*
Ainsi, on a $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\ dt = [\ln(\ln(t))]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))$*.*
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$*, on en déduit que* $\int_3^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \to_{n\to+\infty} +\infty$*. Le théorème de comparaison implique que* $S_n \to_{n\to+\infty} +\infty$*, donc que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ *diverge vers* $+\infty$*.*

Exemple 29 — *Etudions la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$*. C'est une série à termes positifs. En posant* $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$*, on a* $f(n) = \frac{1}{n^2}$*. La fonction* f *est continue, décroissante, et positive sur* $[1,+\infty[$*.*
Donc, par comparaison série-intégrale, on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^2}dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}dx.$$

Une primitive de f *est* $x \mapsto \frac{-1}{x}$*. On a donc* $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + 1 \leq S_n \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{n} + 1$*.*
La suite S_n *est ainsi majorée par une suite convergente, donc la suite* S_n *est majorée (majorée par 3 par exemple). D'après le critère de convergence des séries à termes positifs, on en déduit que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente.*
Déterminons un équivalent du reste R_n *avec un second encadrement série-intégrale.*
Soient $n \geq 1$ *et* $m \geq n+1$*. On a alors*

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x^2}dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^m \frac{1}{x^2}dx.$$

Cela donne $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$*.*
Ces trois suites convergent pour $m \to +\infty$*. D'après le théorème de comparaison, leurs limites*

vérifient donc : $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$.
On a alors $\frac{n}{n+1} \leq \frac{R_n}{\frac{1}{n}} \leq 1$, *donc* $\frac{R_n}{\frac{1}{n}} \to_{n\to+\infty} 1$ *d'après le théorème des gendarmes.*
On obtient ainsi que $R_n \sim \frac{1}{n}$.
Pour obtenir une valeur approchée à 0.01 *près de* $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *il faudra donc déterminer* S_{100}, *car* $S - S_{100} = R_{100} \simeq \frac{1}{100}$.

2.4 Séries à termes généraux équivalents

Théorème 30 (**Séries à termes généraux équivalents**)
Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$, $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles que* $u_n \sim v_n$.
Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est convergente si et seulement si* $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *est convergente.*

- *Si* $\sum_{n\geq n_0} u_n$, $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *sont convergentes, on a* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
Les suites des restes de ces séries sont équivalentes.
- *Si* $\sum_{n\geq n_0} u_n$, $\sum_{n\geq n_0} v_n$ *sont divergentes, on a* $\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim \sum_{k=n_0}^{n} v_k$.
Les suites des sommes partielles de ces séries sont équivalentes.

Démonstration — Ce théorème sera revu et démontré en deuxième année. Il est extrêmement utile car il permet d'étudier plus facilement la convergence d'une série, en s'aidant de séries "de référence" que nous allons étudier ensuite. □

Exemple 31 — *Pour la série des* $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$, *cette série est à termes positifs, et on a* $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}}) \sim \frac{1}{10^n}$.
Comme la série des $\frac{1}{10^n}$ *est convergente, cette série est convergente.*
De plus (par rapport au théorème d'encadrement de séries), on sait que les suites des restes sont équivalentes.
Pour la série des $\frac{1}{10^n}$, *on a vu que le reste d'indice* n, R_n *vaut :*

$$R_n = \frac{10}{9}\frac{1}{10^{n+1}}.$$

On en déduit donc que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}(1 - \frac{1}{1+k^{15}}) \sim \frac{10}{9}\frac{1}{10^{n+1}}$.
Cette suite a elle aussi une vitesse de convergence extrêmement rapide. Il suffit de calculer la somme des premiers termes pour avoir une bonne approximation de la somme de la série (de sa limite).

2.5 Convergence d'une série via les croissances comparées

Méthode 32 (**Montrer qu'une série est convergente via les croissances comparées**)
Cette méthode s'applique aux séries à termes positifs, dont le terme général est de la forme $\frac{a_n}{b_n}$, *avec* b_n *un terme qui domine* a_n *d'après les croissances comparées, et de la forme* n^c *avec* $c > 1$, q^n *avec* $q > 1$, $n!$, *ou* n^n.
Alors, la série $\sum_{n\geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$ *est convergente.*
En effet :

- *Si b_n est de la forme q^n ($q>1$), ou $n!$, ou n^n, alors on aura $\frac{n^2.a_n}{b_n} \to_{n\to+\infty} 0$ d'après les croissances comparées.*
  Donc, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on aura $\frac{n^2.a_n}{b_n} < 1$, c'est-à-dire $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{n^2}$.
  Le terme général de la série $\sum_{n\geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$, série à termes positifs, est donc majoré à partir d'un certain rang par le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison, cette série est donc convergente.
- *Si b_n est de la forme n^c avec $c>1$, alors on aura $\frac{n^{1+\frac{c}{2}}.a_n}{b_n} \to_n 0$ d'après les croissances comparées.*
  Donc, pour n assez grand, on aura $\frac{n^{1+\frac{c}{2}}.a_n}{b_n} < 1$, c'est-à-dire $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{n^{1+\frac{c}{2}}}$.
  La série $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n^{1+\frac{c}{2}}}$ est convergente (cf. séries de Riemann). Le terme général de la série $\sum_{n\geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$ est donc majoré à partir d'un certain rang par le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison, cette série est donc convergente.

Cette méthode demande plus de précision pour être utilisée mais permet de montrer facilement que d'autres séries convergent.

Exemple 33 — *Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ et $v_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. Montrons que les séries $\sum_{n\geq 2} u_n$ et $\sum_{n\geq 2} v_n$ sont convergentes.*
Premièrement, ce sont deux séries à termes positifs.
• D'après les croissances comparées, on a $\frac{n^{10}.n^2}{2^n} \to_{n\to+\infty} 0$.
Donc, il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{n^{10}.n^2}{2^n} \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{n^{10}}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ est convergente.
• D'après les croissances comparées, on a $\frac{\ln(n)n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \to_{n\to+\infty} 0$.
Donc, il existe $n_1 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on a $\frac{\ln(n)n^{\frac{3}{2}}}{n^2} \leq 1$, c'est-à-dire $\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (cf. séries de Riemann), on en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.
Dans le cas de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$, on a dû choisir un terme de la forme n^d avec $d<2$ pour que $u_n.n^d \to_{n\to+\infty} 0$ par croissances comparées, et avec $d>1$ pour que la série des $\frac{1}{n^d}$ soit convergente (cf. séries de Riemann). Le nombre $d = \frac{3}{2}$ respecte ces deux conditions.

2.6 Séries et inégalité de Taylor-Lagrange

Méthode 34 (**Montrer une convergence et calculer une somme avec l'inégalité de Taylor-Lagrange**)
Cette méthode s'applique aux séries à termes positifs, dont le terme général est de la forme $\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!}$, avec $a, x \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[a,x]$.
En effet, la somme partielle S_n correspond alors à la partie polynômiale du développement limité de f en a, à l'ordre n, évaluée en x.
L'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne :

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}| \leq \frac{|x-a|^{n+1}.\max_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}.$$

Si le terme $\frac{|x-a|^{n+1}.\max_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}$ *converge vers* 0 *quand* $n \to +\infty$*, alors on aura* $|f(x) - S_n| \to_{n\to+\infty} 0$ *d'après le théorème des gendarmes.*
Cela implique que $S_n \to_{n\to+\infty} f(x)$*.*
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!}$ *est convergente, et sa somme vaut* $S = f(x)$*.*

Exemple 35 — *On considère la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^{(n)}(1).(-1)^n}{n!}$.
On pose $a = 1$*,* $x = a - 1 = 0$*, et* $f = \sin$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on a alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$*. On reconnaît alors que* S_n *est la partie polynômiale du développement limité de* $\sin$ *en* 1*, à l'ordre* n*, évaluée en* 0*.*
L'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne : $|\sin(0) - S_n| \leq \frac{|-1|^{n+1}.\max_{t\in[0,1]}|\sin^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}$.
On a $\sin^{(n+1)} = \pm\cos$ *ou* $\pm\sin$ *selon la valeur de* n*, donc* $|\sin^{(n+1)}| \leq 1$*.*
D'où $|\sin(0) - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$*.*
Comme $\frac{1}{(n+1)!} \to_{n\to+\infty} 0$*, alors on a* $|\sin(0) - S_n| \to_{n\to+\infty} 0$ *d'après le théorème des gendarmes.*
Cela implique que $S_n \to_{n\to+\infty} \sin(0) = 0$*.*
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^{(n)}(1).(-1)^n}{n!}$ *est convergente, et sa somme vaut* 0*.*

Remarque 36 — *L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer à la fois qu'une série est convergente tout en déterminant sa somme. L'idée est de montrer que pour un nombre* $f(x)$ *bien choisi on a* $|f(x) - S_n| \to_{n\to+\infty} 0$*.*
Contrairement à la comparaison série-intégrale, aux équivalents, ou aux croissances comparées, cette méthode s'applique sur des séries qui ne sont pas forcément à termes positifs.
Il faut par contre pouvoir identifier une partie polynômiale de développement limité, et arriver à simplifier $\frac{|x-a|^{n+1}.\max_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}$.

Remarque 37 — *Les théorèmes ou méthodes pour déterminer la convergence ou calculer la somme d'une série* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *sont nombreux (comparaison, équivalence, croissances comparées, série classique, encadrement série-intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange).*
Il est courant que plusieurs de ces résultats s'appliquent sur une même série. Dans ce cas, il s'agit de choisir la méthode qui fournira le résultat le plus rapidement possible.
L'objectif est de maîtriser l'ensemble de ces résultats afin de pouvoir étudier le plus grand nombre de séries possibles.

3 Séries usuelles

3.1 Séries télescopiques

Définition 38 (**Séries télescopiques**)
Soit $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *une série.*
On dit que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ *est une* ***série télescopique*** *s'il existe une suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq 0$*, on a* $u_n = v_{n+1} - v_n$*.*
On l'écrit aussi $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$*.*

Proposition 39 (**Convergence des séries télescopiques**)
Soit $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ *une série télescopique, avec* $u_n = v_{n+1} - v_n$.
Alors, la série télescopique $\sum\limits_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$ *est convergente si et seulement si la suite* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *est convergente.*
De plus, si la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ *converge, on a* $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_k) - v_{n_0}$.

Démonstration — La somme partielle est une somme télescopique. On a donc : $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_{n_0}$.
Cela permet d'obtenir tous les résultats de l'énoncé. □

Exemple 40 — *On veut étudier (nature, somme) la série de terme général* $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, *pour* $n \geq 2$.
C'est une série à termes négatifs. Transformons l'expression :
$u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n^2-1}{n^2}) = \ln(\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n) = (\ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(n))$ *On reconnaît deux termes généraux de séries télescopiques.*
On a $\sum\limits_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = 0 - \ln(n)$.
Et, $\sum\limits_{k=2}^{n} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(2)$.
Donc, $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln(\dfrac{n+1}{n}) - \ln(2) = \ln(1 + \dfrac{1}{n}) - \ln(2)$.
Cette suite est donc convergente, vers $-\ln(2)$.
Ainsi, la série est convergente, et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$.
On peut remarquer ici que les deux séries télescopiques identifiées sont divergentes, mais que leur différence est convergente (les "termes dominants" se compensent).

3.2 Séries géométriques

Définition 41 (**Séries géométriques**)
Soit $q \in \mathbb{R}$.
La série $\sum\limits_{n \geq 0} q^n$ *est appelée* ***série géométrique*** *de raison* q.

Proposition 42 (**Convergence des séries géométriques**)
Soit $q \in \mathbb{R}$.
- *La série géométrique* $\sum\limits_{n \geq 0} q^n$ *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.
On a de plus $R_n \sim \frac{q^{n+1}}{1-q}$.
- *Pour* $q = 1$, *la série diverge vers* $+\infty$, *avec* $S_n \sim n$.
- *Pour* $q = -1$, *la série diverge. Elle est périodique de période* 2.
- *Pour* $q > 1$, *la série diverge vers* $+\infty$, *avec* $S_n \sim \frac{q^{n+1}}{|1-q|}$.
- *Pour* $q < -1$, *la série diverge, avec* $|S_n| \sim \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$.

Démonstration — On peut remarquer de plus qu'une série géométrique est une série à termes positifs lorsque $q \geq 0$.
Si $q = 1$ la série est divergente vers $+\infty$ car les sommes partielles valent $S_n = n + 1 \sim n$.
Si $q \neq 1$, les sommes partielles sont des sommes géométriques : $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
En utilisant les résultats sur la convergence de q^n, on en déduit que si $|q| < 1$ la suite des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-q}$.
On a alors $R_n = S - S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}-1}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.
Si $q = -1$ ou si $|q| > 1$, les sommes partielles ne convergent pas.
Pour $q = -1$ la suite S_n est périodique de période 2 (elle prend les valeurs 1 et 0).
Pour $|q| > 1$, on a $|S_n| = \dfrac{|1 - q^{n+1}|}{|1 - q|}$.
Or, on a $|q|^{n+1} \to +\infty$, donc $\frac{|1-q^{n+1}|}{|q|^{n+1}} = |\frac{1}{q^{n+1}} - 1| \to_{n\to+\infty} 1$. Ainsi, on obtient que $|S_n| \sim \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$.
Si $q > 1$, cela implique que S_n diverge vers $+\infty$. Dans le cas $q < -1$ on a divergence, mais le signe de S_n alterne.
□

3.3 Série harmonique, séries de Riemann

Définition 43 (**Série harmonique**)
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *(avec $n \geq 1$) est appelée* ***série harmonique****.*
Son terme général est $\frac{1}{n}$.

Proposition 44
La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*
Plus précisément, on a $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Démonstration — Pour démontrer cela on utilise le théorème de comparaison série-intégrale, avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout $k \geq 2$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{t}\, dt.$
Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k-1} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) - \ln(1)$$

On a $\ln(n+1) = \ln(n(1 + \frac{1}{n})) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \ln(n)$, et de même $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln(1 - \frac{1}{n}) \sim \ln(n)$.
Comme les membres de gauche et de droite sont équivalents à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$, donc que $S_n \sim \ln(n)$. □

La série harmonique est divergente, mais très lentement (à vitesse logarithmique). Pour $n = 1.000.000 = 10^6$, la somme partielle est équivalente à $\ln(10^6) = 6\ln(10) \simeq 13,8$.

Définition 45 (**Séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est appelée* ***série de Riemann*** *de paramètre* α.
Son terme général est $\frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 46 (**Convergence des séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
• *Si* $\alpha \leq 1$, *la série de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est divergente.*
Pour $\alpha < 1$, *on a* $S_n \sim \frac{1}{|\alpha-1|n^{\alpha-1}}$.
Pour $\alpha = 1$ *on a* $S_n \sim \ln(n)$. *(série harmonique)*
• *Si* $\alpha > 1$, *la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente.*
De plus, on a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Démonstration — Les séries de Riemann sont des séries à termes positifs.
• Si $\alpha \leq 1$, pour $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$.
Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (c'est la série harmonique), par comparaison on en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge vers $+\infty$.
Pour obtenir un équivalent de S_n, on effectue une comparaison série-intégrale avec $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
• Si $\alpha > 1$, on refait une comparaison série-intégrale, avec $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
Pour tout $k \geq 2$, on a $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$.
On a $\int_a^x \frac{1}{t^\alpha} = [\frac{1}{-(\alpha-1)} \frac{1}{t^{\alpha-1}}]_a^x = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$.
Comme $\alpha - 1 > 0$, on trouve que $\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, donc l'intégrale en question est convergente quand $x \to +\infty$, donc elle est majorée.
Cela permet de montrer que S_n est majorée, ce qui implique que S_n converge, car la série est à termes positifs.
Avec la même méthode que pour la série harmonique, on encadre le reste $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha}$ par deux intégrales, qui sont toutes deux équivalentes à $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. □

Les séries de Riemann sont un exemple fondamental de séries convergentes/divergentes. Dans beaucoup de cas, on se contente de comparer une série de terme u_n à une série de Riemann, pour conclure sur sa convergence ou non.
En particulier, on trouve que la série des $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Des théorèmes d'analyse en PT montreront que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour le moment, on sait que cette série converge vers sa somme à la vitesse de $\frac{1}{n}$ (son reste R_n est équivalent à $\frac{1}{n}$). La série des $\frac{1}{n^3}$ est convergente, et converge vers sa somme à la vitesse de $\frac{1}{2n^2}$.

3.4 Séries exponentielles

Définition 47 (**Séries exponentielles**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est appelée* ***série exponentielle*** *de paramètre* x.
Son terme général est $\frac{x^n}{n!}$.

Proposition 48 (**Série exponentielle**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Alors, la série exponentielle* $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente.*

De plus, a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.

Démonstration — Soit $x \in \mathbb{R}$. Même si cela n'est pas nécessaire dans cette preuve, montrons que cette série est convergente à l'aide des croissances comparées. Pour montrer que cette série est convergente, montrons qu'elle est absolument convergente. La série de terme général $\frac{|x|^n}{n!}$ est une série à termes positifs, montrons qu'elle est

majorée.
D'après les croissances comparées, on a $\frac{|x|^n n^2}{n!} \to_{n\to+\infty} 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{|x|^n n^2}{n!} \leq 1$, ce qui donne $\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$.
La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc par critère de comparaison la série de terme $\frac{|x|^n}{n!}$ est convergente.
Donc, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. Cette série est donc convergente.
On remarque que la somme partielle S_n correspond à la partie polynômiale du développement limité de la fonction exp, en 0, à l'ordre n, évaluée en x.
L'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne alors : $|\exp(x) - S_n| \leq \frac{|x-0|^{n+1} \cdot \max_{t\in[0,x]} |\exp^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}$.
On a $\exp^{(n+1)} = \exp$, et $\max_{[0,x]} \exp = \exp(x)$ ou $\exp(0)$ (selon si x est positif ou négatif).
Comme exp est croissante, on aura toujours $\max_{[0,x]} \exp = \max(e^0, e^x) = \max(1, e^x)$.
D'où $|\exp(x) - S_n| \leq \frac{x^n \max(1,e^x)}{(n+1)!}$.
D'après les croissances comparées, $\frac{x^n \max(1,e^x)}{(n+1)!} \to_{n\to+\infty} 0$. Donc on a $|\exp(x)-S_n| \to_{n\to+\infty} 0$ d'après le théorème des gendarmes.
Cela implique que $S_n \to_{n\to+\infty} \exp(x)$.
Ainsi, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$. □

EXEMPLE 49 — *Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.*
On peut donc calculer une valeur approchée de e de cette façon, et retrouver que $e \simeq 2,7$.
De même, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \simeq 0,37$.

3.5 Séries alternées, séries logarithmes

EXEMPLE 50 — ***(Série alternée)***
Voici un exemple de série convergente, mais pas absolument convergente.
Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, et l'on étudie la série associée.
On remarque que le signe de u_n alterne entre positif et négatif, alors que la valeur de $|u_n|$ décroît vers 0.
Pour montrer que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs, et utiliser le critère des suites adjacentes.
La suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ des termes d'indice pair est croissante car
$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0.$$
De même la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ des termes d'indice impairs est décroissante (on a $S_{2n+3}-S_{2n+1} < 0$).
De plus, la différence $S_{2n+1} - S_{2n}$ est égale à $\dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$, et tend donc vers 0.
Les deux suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commune. Ainsi la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
En fait, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.
Par contre, la série des $|u_n|$ est la série de terme général $\frac{1}{n}$, qui n'est pas convergente.
La série des $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

PROPOSITION 51 (**Séries logarithmes**)

Soit $x \in]-1,1[$. Alors, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

Démonstration — Cette série est une série dite alternée (HP). Montrer sa convergence se fait comme dans l'exemple précédent. On montre que sa somme vaut $\ln(1+x)$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange. □

Remarque 52 — *Les sommes de séries géométrique, exponentielle, logarithme donnent les fonctions $\frac{1}{1-x}, \exp(x), \ln(1+x)$.*
Les termes généraux de ces séries corespondent aux parties polynômiales des développements limités de leurs sommes (x^n, $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$).
Ces séries font partie de la famille des séries entières (de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$). Ces séries définissent des fonctions qui vont pouvoir être décomposées avec la formule de Taylor tout comme les polynômes : le coefficient devant x^n est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (donc $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$).
Ce lien fort entre DL et séries entières est développé en 2e année et en L3.

4 Bilan des méthodes

Lorsque l'on est face à une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, on regardera plus ou moins dans l'ordre :

- Le terme de départ de la série.
  Cela permet d'écrire les sommes partielles S_n sans erreurs.
- Les premières valeurs des sommes partielles S_n.
  Cela permet parfois de constater des valeurs particulières, une croissance, des oscillations, une divergence.
- Le signe de u_n quand n tend vers $+\infty$.
  Si le signe de u_n est constant à partir d'un certain rang, on pourra utiliser les résultats du cours sur les séries à termes positifs.
  Sinon, on ne peut pas utiliser ces résultats (les appliquer serait totalement faux).
- La limite de u_n quand $n \to +\infty$.
  Si $u_n \to 0$ la série peut être convergente.
  Sinon, elle est divergente.
- L'expression de u_n par rapport aux séries classiques.
  Si u_n s'écrit comme une combinaison linéaire de séries classiques (ex : $u_n = \frac{3}{2^n} - \frac{4}{n^2}$, on peut obtenir la nature de la série à partir des séries classiques.
  Attention, cela ne fonctionne pas pour les produits de termes généraux (la série de terme $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$ est CV)
- Si u_n s'écrit de la forme $v_{n+1} - v_n$.
  Cela donne une série télescopique, qui se calcule alors très facilement.
- Si u_n s'écrit de la forme $\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$, avec f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle contenant a.
  La somme partielle S_n est alors une partie polynômiale de $DL_n(a)$, et l'inégalité de Taylor-Lagrange peut permettre de montrer que la série converge et que sa somme vaut $f(x)$.
- Un équivalent de u_n. (Pour séries à termes positifs)
  Pour obtenir un équivalent on pourra utiliser une factorisation par le terme dominant ou des DL (mais pas les croissances comparées).
  Il n'est pas toujours possible d'obtenir un équivalent plus simple.
  En général, quand on obtient $u_n \sim v_n$, le terme v_n est un terme général de série usuelle

(à une constante près).
Alors la nature de $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est la même que celle de $\sum_{n\geq n_0} v_n$.

- Si u_n s'écrit de la forme $\frac{a_n}{b_n}$ avec la possibilité d'appliquer les croissances comparées entre a_n et b_n. (Pour séries à termes positifs)
Si b_n est de la forme n^b $(b > 1)$ ou a^n $(a > 1)$ ou $n!$ ou n^n, on peut alors montrer que la série est convergente en utilisant la méthode des croissances comparées, grâce à une majoration à partir d'un certain rang.
- Une majoration/minoration de u_n. (Pour séries à termes positifs)
Il suffit que la majoration soit vraie à partir d'un certain rang.
En général une majoration est plus technique à obtenir qu'un équivalent.
Si $u_n \leq v_n$ avec $\sum_{n\geq n_0} v_n$ CV, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est CV.
Si $v_n \leq u_n$ avec $\sum_{n\geq n_0} v_n$ DV, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est DV.
- Un encadrement série-intégrale. (Pour séries à termes positifs)
On écrit u_n comme $f(n)$, avec f une fonction continue, positive, décroissante.
Il faut pouvoir calculer une primitive F de f, sinon la méthode n'est pas utile.
On fait un dessin au brouillon de la courbe de f, des valeurs de u_n, et des intégrales de f entre $n-1$ et n et entre n et $n+1$.
Si $F(n)$ est majorée quand $n \to +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est CV. Si $F(n) \to +\infty$ alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est DV.
On peut de plus obtenir un équivalent de R_n ou de S_n en changeant les bornes de l'encadrement série-intégrale.
- Si u_n n'est pas toujours positif, étudier la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ et voir si $|u_n|$ vérifie l'un des critères de convergence précédents.
La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sera alors absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente.

Ces éléments permettent d'étudier la majorité des séries que vous rencontrerez. Les premières informations ne sont pas suffisantes pour montrer la CV/DV d'une série, mais permettent de mieux comprendre comment se comporte la série et ainsi trouver le résultat/le calcul qui permet de trouver la nature de $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Pour les exemples et contre-exemples classiques, il faut se référer aux séries usuelles ($\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2^n}$, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{n!}$).

Pour le calcul de la somme d'une série, les approximations (équivalent, DL, croissances comparées, majoration/minoration) sont inutiles.
En général il faut réécrire le terme u_n comme une somme de termes de séries usuelles, ou utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange, ou déterminer une relation particulière pour S_n.
Calculer la somme d'une série est bien plus compliqué en général que déterminer sa convergence/divergence.

5 Application : développement décimal d'un nombre réel

L'application des séries que nous voyons dans ce chapitre est le développement décimal d'un nombre réel.

Théorème 53
Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
Alors il existe une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ pour $n \geq 1$, telle que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

De plus, si on impose que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang, celle-ci est unique.
Les nombres de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ forment le ***développement décimal*** *du nombre réel x.*

Démonstration — Avec la définition donnée, les chiffres constituant la suite (à part a_0 qui est la partie entière de x) sont simplement les décimales du nombre x, écrit sous forme décimale usuelle. On pose : $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. On peut alors remarquer que pour $n \geq 1$ on a $\frac{a_n}{10^n} = b_n - b_{n-1}$.
Par télescopage, on obtient donc : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{k-1} = a_0 + (b_n - b_0) = \lfloor x \rfloor + b_n - \lfloor x \rfloor = b_n$.
Or, on a : $10^n x - 1 \leq \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$, donc $\frac{10^n x - 1}{10^n} = x - \frac{1}{10^n} \leq b_n \leq \frac{10^n x}{10^n} = x$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a $b_n \to_{n\to+\infty} x$.
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n}$ est donc une série convergente, de somme égale à x. □

Remarque 54 — *Toute série de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'avère être convergente.*
A part a_0 cette série est à termes positifs, et pour $n \geq 1$ on a $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$.
Les termes de la série sont majorés, à partir de $n = 1$, par ceux d'une série géométrique (de raison $\frac{1}{10}$). Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n}$ est convergente, on en déduit par critère de comparaison que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}$ est convergente.
Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n}$ est convergente.
Pour $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$, les nombres a_n sont le développement décimal de S.

Théorème 55
Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.
Alors x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration —
- Si $x = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on peut obtenir les chiffres de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ en effectuant la division euclidienne de p par q. Le nombre de restes possibles à chacune des étapes de cette division étant fini, on finira par obtenir à une certaine étape un reste déjà obtenu précédemment. Alors, les étapes suivantes vont répéter exactement les mêmes opérations que précédemment. A partir d'un certain rang, la suite des décimales de x est périodique.
- Réciproquement, supposons que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang. Posons $n_0 + 1$ le rang à partir duquel la périodicité apparaît, et posons r la longueur de la période. Notons $b_1, \dots, b_r$ les entiers qui composent la période.

On pose $y = (x - a_0, a_1 \dots a_{n_0}).10^{n_0}$. (On retire à x sa partie entière et ses n_0 premières décimales, et on multiplie le tout par 10^{n_0}.
On a alors : $y = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{a_{n_0+k}}{10^k} = 0, a_{n_0+1}a_{n_0+2}\dots$.
Autrement dit, on a $y = 0, b_1 b_2 \dots b_r b_1 b_2 \dots b_r \dots$.
Le nombre y est un nombre dont les décimales sont périodiques, dès la première décimale (période r, et le motif est $b_1 \dots b_r$).
Alors, $10^r.y = b_1 b_2 \dots b_r, b_1 b_2 \dots b_r \dots$.
Et donc,

$$10^r y - y = (b_1 b_2 \dots b_r, b_1 b_2 \dots b_r \dots) - 0, b_1 b_2 \dots b_r \dots = b_1 b_2 \dots b_r = b_1.10^r + b_2.10^{r-1} + \dots + b_{r-1}.10 + b_r.$$

On en déduit donc que $(10^r - 1).y$ est un entier. Donc y est un rationnel.
Comme on a $y = (x - a_0, a_1 \dots a_{n_0}).10^{n_0}$, on a $x = \frac{y}{10^{n_0}} - a_0, a_1 \dots a_{n_0}$. Donc, x est un rationnel (comme quotient et somme de rationnels). □

Exemple 56 — *Prenons $x = 2,1567423781378137813781\dots$ (les décimales répétant le motif 3781), et trouvons une forme rationnelle de x.*
On a : $(x - 2,156742).10^6 = 0,37813781\dots$.
Donc $(x - 2,156742).10^{10} = 3781,37813781\dots$.
Ainsi, on a $(x - 2,156742).10^{10} - (x - 2,156742).10^6 = 3781$.
Cela donne : $(x - 2,156742).10^6.(10^4 - 1) = 3781$.
D'où : $x - 2,156742 = \frac{3781}{10^6.9999}$.
Enfin : $x = \frac{3781}{10^6.9999} + 2,156742 = \frac{3781}{10^6.9999} + \frac{2156742}{10^6} = \frac{3781+2156742.9999}{10^6.9999}$.
On a bien obtenu une écriture rationnelle de x, même si cette écriture est sûrement simplifiable.

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

— Définition d'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n. Nature (convergente/divergente), somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, reste $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Série absolument convergente.
— Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, le reste tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
— Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Critère de comparaison série-intégrale. Séries à termes généraux équivalents. Méthode des croissances comparées. Méthode de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
— Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$, série télescopique $\sum_{n\geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$, série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
— Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum u_n$ est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).
Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence, ou avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.
— Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.