

F E U I L L E D E T D N° 2

Trigonométrie

Exercice 1.

1. Donner la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$.
3. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\cos(x) = -1$, | 5. $\cos(x) = \sin(2x)$, |
| 2. $\cos(4x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, | 6. $\cos(2x) = \cos^2(x)$, |
| 3. $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}$, | 7. $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$, |
| 4. $\cos(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$, | 8. $\tan(x) = \sqrt{3}$, |
| | 9. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$. |

Exercice 3. Calculer les valeurs des nombres suivants :

- $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$. | • $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\sin(\frac{5\pi}{12})$. | • $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $x \leq \tan(x)$.

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x) \leq x$.

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. (*)

Exercice 5. En réalisant une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$2x < \sin(x) + \tan(x).$$

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ | 3. $\cos(4x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$ |
| 2. $\cos(3x) - \sin(3x) = 0$ | 4. $\sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$ |

Exercice 7. Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ admet-elle des solutions? Déterminer ces solutions lorsque $m = \sqrt{2}$.

On pourra s'aider d'une formule trigonométrique et de valeurs particulières.

Exercice 8.

1. Soient a et b deux nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Montrer qu'il existe un nombre réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi).$$

2. Écrire sous la forme $A \cos(x - \varphi)$ l'expression $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$.

Exercice 9.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(a + b)$ et $\tan(a - b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.
Montrer que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
3. Exprimer $\sin(x)$ en fonction de t , puis $\tan(x)$ en fonction de t .
Ces relations sont les **formules de l'arc moitié**. Elles permettent d'exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ comme des quotients de polynômes en t , ce qui est utile dans les situations de trigonométrie les plus complexes.
4. Exprimer la dérivée de $\tan(\frac{x}{2})$ en fonction de t .