

## FEUILLE DE TD N° 3

## Fonctions

## ■ Inégalités

**Exercice 1.** Soient  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  des réels tels que  $a, a' \in [1; 2]$  et  $b, b' \in [-3; -2]$ .

Donner un encadrement de  $\frac{a+b}{a'b'}$ . (une majoration et une minoration qui soient vraies pour toutes les valeurs possibles de  $a, b, a', b'$ )

**Exercice 2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $|a| \leq \epsilon$ .

Montrer que l'on a  $a = 0$ .

Quel raisonnement utiliser ?

**Exercice 3.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ .

Montrer que pour tous  $a, b, c$  réels appartenant à  $[0; 1]$ , au moins un des réels  $a(1-b)$ ,  $b(1-c)$  ou  $c(1-a)$  est inférieur à  $\frac{1}{4}$ .

Quel raisonnement utiliser ?

**Exercice 4.**

1. Montrer que  $\forall a, b > 0$ , on a  $\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

Indication : On pourra fixer  $b$  et faire une étude de fonction en faisant varier  $a$ .

2. Montrer que  $\ln(1+x) \leq x$ ,  $\forall x > 0$ .
3. Montrer que  $\exp(x) \geq x+1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ , on a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ .

Indication : On pourra utiliser la fonction  $\ln$  pour simplifier l'inégalité à étudier, et utiliser une question précédente.

## ■ Domaines de définition

**Exercice 5.** Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{5-3x}}$
2.  $x \mapsto \sqrt{x^2-2x-5}$
3.  $x \mapsto \ln(x^2-2x-5)$

**Exercice 6.** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1.  $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{\sqrt{3-e^x}}$ ,
2.  $f_2 : x \mapsto \sqrt{\ln(2-\sqrt{x})}$ ,
3.  $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(4x-x^2)}$ .

**Exercice 7.** 1. Déterminer l'image par la fonction  $x \mapsto |x|$  de l'intervalle  $] -1, 3]$ .

2. Déterminer l'image par la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  de l'ensemble  $] -2, 4] \setminus \{0\}$ .
3. Déterminer l'image par la fonction  $x \mapsto (x-1)^2$  de l'intervalle  $] -1, 2]$ .

**Exercice 8.** Soient  $0 < a < b < 1$ .

1. Étudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2-ax+1}{x^2-bx+1}$  (domaine de définition, signe, dérivée, variations).
2. En utilisant la méthode  $+1-1=0$ , trouver une expression de  $f(x)$  de la forme  $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2-bx+1}$ , pour  $\alpha, \beta$  des réels (qui ne dépendent pas de  $x$ ).
3. Soient  $r_1, r_2$  les racines de  $x^2-bx+1=0$ . Déterminer deux réels  $\gamma, \delta$  tels que  $\frac{x}{x^2-bx+1} = \frac{\gamma}{x-r_1} + \frac{\delta}{x-r_2}$ .  
A nouveau,  $\gamma, \delta$  sont des réels qui ne dépendent pas de  $x$ .

**Exercice 9.** Montrer que le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.

**Exercice 10.** Étudier la parité des fonctions suivantes (dire si les fonctions sont paires, impaires ou aucun des deux) :

- $f_1(x) = \sin(2x) \cos(x)$ ,
- $f_2(x) = e^x - e^{-x}$ ,
- $f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ ,

**Exercice 11.** Étudier et représenter la fonction  $U : x \mapsto \frac{x \ln(x) - x}{x + 1}$  :

- Donner le domaine de définition et la dérivée de  $U$ .
- Montrer qu'il existe un réel  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $U$  soit décroissante à gauche de  $\alpha$  et croissante à droite de  $\alpha$ .  
Donner les limites de  $U$  aux extrémités du domaine de définition.
- Donner les points où la fonction  $U$  s'annule.
- En déduire l'allure de la courbe représentant  $u$ .

**Exercice 12.** (\*) On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .  
Indication : On utilisera les propriétés de exp et de ln.
- Étudier le sens de variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
- Préciser les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
- Tracer la courbe de  $f$ .

### ■ Fonctions trigonométriques

**Exercice 13.** 1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $\sin(x) \leq x$ .

2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .

**Exercice 14.** Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sin(x) = \frac{1}{2} \\ 2. \cos(x) = \frac{-1}{2} \\ 3. \tan(x) = -1 \end{array} \right\}$$

**Exercice 15.** Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée, et déterminer ses limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+x^2}$$

### ■ Bijections et composition

**Exercice 16.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $f \circ f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'on a alors  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Le résultat reste-t-il vrai si  $f$  n'est pas supposée croissante ?

Si on pense que le résultat est faux, on cherchera un contre-exemple.

**Exercice 17.**

1. Montrer que pour tous  $a, b$  réels strictement positifs, on a  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

2. Montrer que la fonction  $f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective, et donner une expression de sa réciproque  $f^{-1}$ .

$$x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$$

**Exercice 18.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto x^3 + x - 8$ .

- Montrer que  $f$  est strictement croissante et bijective.  
On note  $f^{-1}$  sa réciproque.
- Calculer  $f(2)$  et  $f^{-1}(2)$ .
- Résoudre l'équation  $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .