Feuille de TD n° 7

Suites

Suites récurrentes

Exercice 1.

1. Donner une suite $(u_n)_n$ croissante et convergente.
2. Donner une suite $(u_n)_n$ décroissante et convergente.
3. Donner une suite $(u_n)_n$ convergente mais pas monotone.
4. Donner une suite $(u_n)_n$ qui tend vers $+\infty$.
5. Donner une suite $(u_n)_n$ qui tend vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
6. Donner une suite $(u_n)_n$ qui n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.
7. Donner une suite $(u_n)_n$ qui n'a pas de limite, et qui est non-majorée.
8. Donner une suite $(u_n)_n$ qui n'a pas de limite, qui est bornée, et qui n'est pas périodique.

Exercice 2. Calculer le terme général des suites définies de la manière suivante :

1. $u_0 = 1$,
   $u_{n+1} = 3u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+^*$,
   $u_{n+1} = bu_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
5. $u_0 = 2$,
   $u_{n+1} = (n+1)u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
6. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \cos(\theta)u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$,
   avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Encadrement

Exercice 3. Est-ce que le produit de deux suites minorées est une suite minorée ? Est-ce que le produit de deux suites majorées et négatives est une suite majorée ?

Exercice 4. Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ qui est croissante à partir d'un certain rang est minorée.
On pourra poser n_0 le rang à partir duquel $(u_n)_n$ est croissante, et séparer deux cas.

Monotonie

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Montrer que si $(u_n)_n$ est décroissante, alors $(v_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que si $(u_n)_n$ est convergente, de limite l, alors $(v_n)_n$ converge vers l.
   Indication : On utilisera la définition de "$u_n \to_n l$" (avec les quantificateurs) pour montrer que $|v_n - l| < \epsilon$ pour n assez grand. On utilisera aussi un découpage en deux de $u_1 + \ldots + u_n$.
4. Montrer que la réciproque est fausse : Si $(v_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ ne converge pas forcément.

Exercice 6. On considère l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Démontrer qu'il existe une unique racine positive a_n à cette équation.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.
   Indice : Calculer $a_n^{n+1} - 1$.

Limites de suites

Exercice 7. Déterminer la limite des suites suivantes

1. $u_n = \frac{n^2}{\ln(n)}$
2. $u_n = \sqrt{n} - n^{\frac{1}{3}}$
3. $u_n = \frac{n^7}{(n+1)^7}$
4. $u_n = \frac{n!}{n^2}$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+4}}$
   Utiliser l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exercice 8. Montrer que la suite de terme général
$u_n = \dfrac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos(\frac{n\pi}{5})}$ est divergente.

Exercice 9. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par
$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.
Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 10. On considère $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En considérant $H_{2n} - H_n$, montrer que la suite $(H_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 11. Soient u et v les suites définies pour tout $n \geq 0$ par
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.
Montrer que la suite complexe $(u_n + iv_n)_n$ est géométrique. Déterminer sa raison r.
En déduire des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Pour aller plus loin

Exercice 12. On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$$

1. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.
   Indice : Raisonner par l'absurde.
3. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de l la limite de la suite de terme général :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!}$$

Exercice 13. On considère la suite récurrente $(u_n)_n$ qui vérifie la relation :

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n (n+1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Indice : Poser la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

Exercice 14.

1. On définit la suite $(x_n)_n$ par : $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 0$.
   (a) Déteminer la limite de $(x_n)_n$.
   (b) Montrer que $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_n$ tend vers une limite finie, et déterminer cette limite.
   (c) Quelle est la limite de $(\frac{1}{x_n^2})_n$?
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente, et donner sa limite.