

FEUILLE DE TD N° 9

Calcul matriciel

Exercice 1.

Calculer :

$$\begin{array}{l}
 1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 3. \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Exercice 2.

Calculer :

$$\begin{array}{l}
 1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2
 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 3. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 4. (1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Exercice 3. On pose dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $AB, BA, A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

Exercice 4 (Equation matricielle). On note $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation :

$$M^3 = A$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en remarquant que si $M^3 = A$ alors $AM = MA$.

Exercice 5 (Puissance de matrice). On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Exprimer C en fonction de J et de I_3 .
2. Déterminer toutes les puissances de J .
3. Calculer toutes les puissances de C .

Exercice 6. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire toutes les puissances positives de A .
2. On considère deux suites réelles définies par la donnée de u_0 et v_0 par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = -u_n$$

Déterminer une expression de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 7. Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A = P^{-1}DP$.
2. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

■ *Classiques à savoir refaire*

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
- En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 9. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)

- Montrer que N n'est pas inversible.
- Montrer que $I_n - N$ est inversible.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.

- Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
- En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 11. On dit qu'une matrice S est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0$. On se donne dans la suite une matrice D diagonale.

1. Calculer $X^T D X$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire une CNS pour que D soit positive.

Exercice 12. Montrer que le produit de deux matrices symétriques A, B est une matrice symétrique si et seulement si les deux matrices commutent ($AB = BA$).

Exercice 13. Soit n un entier naturel non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire ayant un 1 en case (i, j) et des 0 partout ailleurs. En déduire toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant pour tout B dans $\mathcal{M}_n(K)$, $AB = BA$.

■ Méthode du Pivot

Exercice 14. Echelonner les matrices suivantes.

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$. 6. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ |
|---|--|

Exercice 15. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 = 1 \end{cases}$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{K}$.

■ Inversibilité

Exercice 17. Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible.

Donner une expression de A^{-1} en fonction de A , puis calculer la valeur de A^{-1} .

Exercice 18.

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 19. Calculer l'inverse de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$