Feuille de TD n° 15

Analyse asymptotique

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

1. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
2. $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
3. $w_n = n^{\frac{1}{n}}$.
4. $z_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
5. $t_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n}$ (on pourra mettre au même dénominateur)
6. $s_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ (on pourra utiliser $x = \exp(\ln(x))$)

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants :

- $DL_4(0); f(x) = \frac{1}{1+x} - 2\ln(1+x)$
- $DL_4(0); f(x) = \sin(x)^2\cos(x)$
- $DL_3(2); f(x) = \exp(5+3x)$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_4(0); f(x) = (1+\sin(x))^x$
- $DL_2(1); f(x) = \arctan(2x)$
- $DL_3(0); f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_2(2); f(x) = x^x$

Exercice 3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la suite dont le terme général est :

1. $u_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, pour $a \in \mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que $x = \exp(\ln(x))$, $\forall x > 0$.
2. $v_n = \dfrac{(n+1)^{1/2} - n^{1/2}}{n}$
   On pourra faire apparaître une fraction et utiliser l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
3. $w_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)$
4. $z_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$
5. $y_n = \left(\dfrac{3n+3}{7n+1}\right)^n$
   On pourra utiliser la question 1).

Exercice 4. Étudier le comportement des fonctions suivantes (prolongement, continuité, existence de tangente, et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x) = \frac{\sin(\cos(3x))-1}{x}$ au voisinage de 0.

Exercice 5. Déterminer la limite des suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
4. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Donner, si elle existe, leur limite pour $n \to +\infty$.

Exercice 7. Calculer à l'aide de développements limités les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(ch\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 8. Soient $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} + \frac{1}{n}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

A l'aide d'un DL_3 en $\frac{1}{n}$, calculer un développement asymptotique de $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.
En déduire les valeurs de α telles que la suite $(u_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 9. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrer que les u_n sont positifs. (On raisonnera par l'absurde)
Montrer que la suite converge, et que sa limite vaut 0.
Donner un équivalent simple de u_n.
Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ? (Si non, on pourra chercher un contre-exemple)

Exercice 10. Déterminer des équivalents des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0
2. $x \mapsto (x+1)^x - x^x$ en 0
3. $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ en $+\infty$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$ (poser $x = \frac{\pi}{2} + u$)

On pourra s'aider de DL (à l'ordre $1, 2$ ou 3) pour trouver les équivalents.

Exercice 11. Calculer les développements limités suivants :

- $DL_2(0); f(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_5(0); f(x) = \tan(x)$
- $DL_3(0); f(x) = e^{\sin(x)}$

Exercice 12. On considère, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-1 \leq u_n \leq 0$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
4. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.
5. A l'aide de la question précédente, montrer que $u_n + 1 = -1 + \dfrac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
6. Puis, montrer que que $u_n = -1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.