Feuille de TD n° 17

Probabilités

10 juin 2023

Dénombrement

Exercice 1.
Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 2.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
2. Quel est l'ensemble $\bar{A}$?
3. Calculer $Card(\bar{A})$.
4. Calculer $Card(A)$.

Mesures de probabilités

Exercice 4. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

Exercice 5.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).
On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probas uniforme $\mathbb{P}$.

1. On note C l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1.
   Calculer $\mathbb{P}(C)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $\mathbb{P}(A)$.
   Quelle est la limite de cette quantité quand $n \to +\infty$?

Exercice 6. Soit $n \geq 2$. Une assemblée comporte n personnes.
On s'intéresse aux dates d'anniversaire des n personnes. (On suppose que personne n'est né un 29 Février.)
Soit Ω l'ensemble de toutes les dates d'anniversaire possibles pour ces n personnes.

1. Donner une expression de Ω. Calculer $Card(\Omega)$.
   On suppose que les personnes de l'assemblée ont été choisies sans aucun biais parmi la population.
2. Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à ce choix ?
   On pose A l'ensemble des configurations où au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire.
3. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 7.
Soit $n \geq 1$. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$.
1. Exprimer la mesure de probas uniforme U sur $(E, \mathcal{P}(E))$ comme combinaison linéaire de mesures de Dirac δ_ω. On pose $f = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}\delta_n$.
2. Quelle expérience aléatoire peut être associée à la mesure de probabilité f ?
3. Calculer $f(\{1, n\})$ et $f(2\mathbb{N} \cap E)$.

Exercice 8. Dans un jeu de 52 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de pique ($\spadesuit$) par un second as de pique.
Un joueur choisit au hasard de façon uniforme 3 cartes.
• Quel ensemble Ω et quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ faut-il prendre pour modéliser cette expérience ?
• Quelle est la probabilité qu'il s'aperçoive de la tricherie ?

Exercice 9. A un jeu télévisé, on met 1 voiture et 2 chèvres derrière 3 portes numérotées. Le candidat doit choisir une porte, et il gagne ce qu'il y a derrière.
Un candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre alors une autre porte, qui cachait une chèvre.
Le présentateur propose au candidat de changer de porte, pour gagner ce qu'il y a derrière.
Le candidat doit-il garder sa porte, ou changer pour l'autre porte ?
• Indiquer les 2 hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé.
• Calculer la probabilité demandée.

Exercice 10. (*)
Soit E un ensemble. Soient $1 \leq p \leq n$. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.
On pose sur le couple $(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Combien vaut $Card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$?
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(\emptyset)$ et $\mathbb{P}(\{\emptyset\})$. (**)
   Indication : Bien réfléchir à l'ensemble de définition de $\mathbb{P}$, pour comprendre quelles sont les quantités demandées.
3. On pose B l'ensemble des parties de E telles qui contiennent exactement un élément de A.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$.
   Comment varie cette probabilité en fonction de n et de p ?

Exercice 11. (*) Soit $N > 0$. Une boîte contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On tire N boules successivement sans les remettre.
1. Donner l'ensemble Ω qui représente tous les tirages possibles.
   Calculer $Card(\Omega)$.
2. On note A l'événement : $A =$ « on tire au moins un numéro inférieur ou égal à N ».
   Calculer $Card(\bar{A})$, et en déduire $Card(A)$.
3. On suppose que les boules sont toutes identiques (sauf leur numéro), et qu'on mélange les boules de la boîte avant chaque tirage.
   Quelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à cette façon de tirer les boules ?
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
5. (**) En utilisant la formule de Stirling : $N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}$, étudier la limite de $P(A)$ quand N tend vers ∞.

Probabilités conditionnelles

Exercice 12.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

Exercice 13. Une famille a deux enfants. L'un des enfants est un garçon.
Quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?
• Indiquer les 2 hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé.
• Puis, calculer la probabilité demandée.

Exercice 14. Soient $N \geq 2$ et $p \in [0, 1]$.
On place N coffres numérotés dans une pièce. Avec une probabilité p on place un trésor dans l'un de ces coffres. Si on place le trésor, on choisit un coffre de façon équiprobable ("même probabilité").
On prend pour Ω l'ensemble $\{0, 1, \dots, N\}$, en choisissant :

— "0" correspond à l'événement "le trésor n'est dans aucun coffre"

— Pour $1 \leq i \leq N$, "i" correspond à l'événement "le trésor est dans le coffre numéro i.

• Donner la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui modélise l'expérience.
On écrira la loi de la mesure de probas $\mathbb{P}$.
• Une personne a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor.
Quelle est la probabilité q pour qu'elle trouve le trésor dans le dernier coffre ?
• Donner un équivalent de cette probabilité q quand $N \to +\infty$.

Exercice 15. Vous êtes devant une porte fermée. Vous avez n clefs numérotées de 1 à n. Une seule clef ouvre la porte. Vous décidez d'essayer les clefs l'une après l'autre, au hasard uniforme.

1. Soit, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement E_i : « le i-ème essai est un échec ». Montrer que :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{n-1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{n-2}{n-1}.$$

2. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement S_k : « la porte s'ouvre au k-ième essai » en utilisant les événements E_i et leur contraire $\overline{E_i}$.
3. Avec la formule des probabilités composées, montrer que la probabilité u_k que la porte s'ouvre au k-ième essai est $u_k = \frac{1}{n}$.

■ *Variables aléatoires*

Exercice 16. Soit $n \geq 1$. Un sportif tente de franchir en sautant des obstacles successifs numérotés de 1 à n.
On suppose que tous les sauts sont indépendants les uns des autres, et que la probabilité de franchir l'obstacle numéro k est de $\frac{1}{k}$.
On pose X la v.a. qui indique le dernier obstable franchi (k s'il échoue à $k+1$, ou n si le sportif passe tous les obstacles).
Quelle est l'ensemble d'arrivée de la v.a. X ?
Déterminer la loi de probas de X.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 17. Pour X une v.a., on appelle v.a. centrée de X la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$.
Si $Var(X) \neq 0$, on appelle v.a. réduite de X la v.a. $Z = \frac{X}{Var(X)}$.
Soient $p \in]0, 1[$ et X une v.a. de Bernouilli de paramètre p.
Déterminer X^*, la v.a. centrée réduite de X.

Exercice 18. Soient $p \in]0, 1[$ et $n \geq 1$. On considère un jeu de Pile ou Face, avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce n fois. On suppose que tous les lancers sont indépendants entre eux.
On note X la v.a. qui donne le nombre de Pile obtenus avec les n lancers.
On note Y la v.a. qui donne le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier Face, avec $Y = n$ si on n'obtient jamais Face.

1. Donner l'ensemble image de v.a. X.
2. Calculer la loi de probabilités de X.
   Quelle loi "usuelle" retrouve-t-on ?
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
4. Donner l'ensemble image de la v.a. Y.
5. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
6. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

7. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $A_k = Y^{-1}(\{k\})$.
   Les événements A_k sont-ils indépendants ?

Exercice 19. Soit X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\text{Var}(X)$.
Calculer $\mathbb{P}(X < E(X))$.

Exercice 20. Soit $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.
Soient $X_{,1}, X_2 : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ deux v.a. qui sont indépendantes et qui ont toutes deux comme loi de probas la uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Soit $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixé. On définit la v.a Y par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probas de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, et la comparer à $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle minimale ? maximale ?

Exercice 21. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $X, Y : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ deux variables aléatoires indépendantes.
On définit la fonction $A : \omega \in \Omega \mapsto A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.
Exprimer la probabilité q que la matrice A soit inversible, en fonction des événements $(X = i), (Y = j)$.
On suppose maintenant que X et Y suivent une loi uniforme. Calculer q.
Culture générale : Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité q converge vers un nombre réel. Quel est ce nombre ?

■ *Résultats limites*

Exercice 22.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de probas.
   Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $Var(S_n)$.
   Montrer que $\forall\, a \in]0, +\infty[$, on a $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   (a) On prend une urne avec 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire, sans remise, une boule dans cette urne, de façon aléatoire uniforme et indépendante.
   Pour $n \geq 1$, on pose Y_n la v.a. qui donne la couleur de la boule obtenue au tirage numéro n. (rouge=1, noire=0)
   Donner la loi de la v.a. Y_n.
   Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
   (b) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   Montrer que $\mathbb{P}\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leq 0,05\right)$.
   (c) A l'aide des questions précédentes, montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(0,35 \leq T_n \leq 0,45\right) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}.$$
   (d) Á partir de quel nombre n de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

Exercice 23. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0, 1[$.

1. On pose $X = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.
   Montrer que $Var(X) \leq \frac{1}{4n}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'on a
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) \to_{n \to +\infty} 1$$