Feuille de TD nº 18

Géométrie dans l'espace

Exercice 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur unitaire et normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Repérages

Exercice 2. Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Montrer qu'il existe un réel positif r, deux angles $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que :
$$\left\{\begin{array}{r} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$
2. Montrer que le triplet (r, φ, θ) est unique si M n'appartient pas à l'axe (Oz). On dit que (r, φ, θ) sont les coordonnées sphériques du point M.

Produit scalaire

Exercice 3. Soient $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{w} = (3, 2, 2)$.

1. Montrer que la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de l'espace. Cette base est-elle directe (on rappelle qu'une base est directe ssi son produit mixte est strictement positif) ?
2. Soit $\overrightarrow{t} = (1, -1, m)$ où m est un paramètre réel. Exprimer $\overrightarrow{t}$ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m, les vecteurs $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4. Soit A un point du plan, $\overrightarrow{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.
Indication : On pourra utiliser le projeté orthogonal de M sur la droite (D) passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Plans et droites

Exercice 5.
1. Trouver une famille de deux vecteurs directeurs du plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$. En déduire un système d'équations paramétriques de ce plan.
2. Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique de la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{array}\right.$

Exercice 6. Trouver un vecteur directeur de la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\left\{\begin{array}{l} x = y + 1 \\ z = y \end{array}\right.$. En déduire une équation cartésienne du plan orthogonal à cette droite et passant par $A = (1, 1, 1)$.

Exercice 7. Calculer la distance de $A = (1, 1, 4)$ à P d'équation cartésienne $x - y + 2z = 2$.

Calculer la distance de $A = (4, -3, 2)$ à (D) passant par $B = (1, 0, -1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$.

Exercice 8. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 4 = 0$, $A = (0, 1, 2), B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne de P' le plan contenant ces trois points.
2. Montrer que P et P" sont sécants selon une droite D.

Exercice 9. Soient A et B deux points distincts et I le milieu de $[AB]$. Montrer que le lieu des points équidistants de A et de B est le plan passant par I orthogonal à (AB).
On appelle ce plan, le **plan médiateur de** $[AB]$

Exercice 10. On note $A = (1, 2, 3), B = (2, -1, 2)$, $C = (0, 1, -2)$, (D_1) la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{array}\right.$, (D_2) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2t \\ z = 3+5t \end{cases}$ P_1 le plan de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-2t+3u \\ y = -2+t+u \\ z = 4-t-2u \end{cases}$, P_2 d'équation cartésienne $2x-y+3z=1$ et P_3 d'équation cartésienne $x+2z-4=0$

1. Donner une équation cartésienne de P_1.
2. Donner une équation paramétrique de la droite définie par l'intersection des plans P_2 et P_3.
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Déterminer l'intersection de (D_1) et de P_2.
5. Donner une équation paramétrique du plan contenant (D_1) et parallèle à (D_2).
6. Déterminer l'intersection de P_1, P_2 et P_3.
7. Déterminer l'intersection de P_2 et de (AB).
8. Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant (D_1).

Produit vectoriel

Exercice 11. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs de coordonnées $(-1,1,1),(1,2,-1)$ et $(2,0,3)$.

Exercice 12. Double produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

1. On suppose que la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est libre.
   En utilisant le projeté orthogonal et la renormalisation, construire une famille (u',v') qui est une base orthonormée de $Vec(\vec{u},\vec{v})$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée directe (u',v',w') de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la forme :
$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad \vec{v}\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad \vec{w}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$
3. Montrer que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$.
4. Calculer $(\vec{i}\wedge\vec{i})\wedge\vec{j}$ et $\vec{i}\wedge(\vec{i}\wedge\vec{j})$ et en déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Sphères

Exercice 13. Soient $A=(5,-1,4)$ et $B=(2,0,1)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[A,B]$.

Exercice 14. Montrer que par quatre points non coplanaire passe une unique sphère.

Exercice 15. Soit S la sphère d'équation cartésienne :
$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$$

1. Déterminer le centre et le rayon de S.
2. Déterminer les points M_1 et M_2 de S respectivement le plus proche et le plus éloigné du plan $\mathcal{P}$ d'équation :
$$\mathcal{P} : 3x-4z+19=0$$
   On précisera la distance de M_1 et M_2 à P.