

## FEUILLE DE TD N° 19

## Déterminant

**Exercice 1.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  et  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ .

1. Si  $C_n = C_1$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
2. Si  $C_2 = C_3 + C_4$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
3. Si  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
4. Si  $A \notin GL_n(\mathbb{R})$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
5. Si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $\det(A^{-1}) = \det(A)$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
6. Si  $\det({}^t A) = -\det(A)$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
7. Si  $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
8. Si  $(L_1, \dots, L_n)$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^n$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
9. Si  $A^2 = A$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
10. Si  $A^2 = I_n$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?
11. Si  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$ , que sait-on sur  $\det(A)$  ?

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer les mineurs  $\Delta_{2,2}$  et  $\Delta_{1,3}$ .

Calculer  $\det(A)$  en effectuant un développement selon la première ligne.

Calculer  $\det(A)$  par la méthode du Pivot.

La matrice  $A$  est-elle inversible ?

Déterminer  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{rg}(A)$ .

**Exercice 3.** Soit  $x \in \mathbb{K}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\det(A)$  en utilisant des opérations sur les lignes et sur les colonnes, ainsi que des factorisations.

Factoriser  $\det(A)$  entièrement. On s'aidera de valeurs  $x$  pour lesquelles la matrice  $A$  est clairement non-inversible.

**Exercice 4.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique ( ${}^t A = -A$ ).

- On suppose que  $n$  est impair. Montrer que  $\det(A) = 0$ .
- Si  $n$  est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

**Exercice 5.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Pour  $C_1, C_2, C_3$  les colonnes de  $A$ , chercher une combinaison linéaire de ces colonnes qui est nulle.

- Résoudre l'équation  $\det(\lambda I_3 - A) = 0$ .

On pourra au choix développer le déterminant puis déterminer les racines une à une, ou bien utiliser la première question pour réaliser une opération sur les colonnes (si  $C_3 = aC_1 + bC_2$ , faire  $C_3 \leftarrow C_3 - aC_1 - bC_2$ )

**Exercice 6.** Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 7.** Soit  $n \geq 2$ . On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $\det(A_3)$  et  $\det(A_4)$ , avec des opérations sur les lignes et sur les colonnes.

- En déduire la valeur de  $\det(A_n)$ . (Quelle méthode de raisonnement utiliser ?)

**Exercice 8.** On pose  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre l'équation  $\det(J - \lambda I_3) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .  
Indication : Il faut calculer le déterminant.
2. Pour quels  $z \in \mathbb{C}$  la matrice  $J - zI_3$  est-elle inversible ?
3. Pour chaque  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $J - zI_3$  n'est pas inversible, calculer  $\text{Ker}(J - zI_3)$ .  
Quelle est la dimension de ce sous-ev ?
4. Trouver trois vecteurs  $X_1, X_2, X_3$  tels que  $JX_1 = X_1, JX_2 = jX_2, JX_3 = j^2X_3$ .
5. Que peut-on dire sur la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  ?

**Exercice 9.** Soit  $n \geq 2$ . Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . On définit :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $\det(B_2), \det(B_3), \det(B_4)$ , avec des opérations sur les lignes et sur les colonnes.
- Pour  $n \geq 1$ , déterminer une relation entre  $\det(A_{n+2})$  et  $\det(A_n)$ .
- Pour tout  $n \geq 1$ , en déduire la valeur de  $\det(A_n)$ .