

Chapitre 2

Trigonométrie

Table des matières

1	Généralités	1
1.1	Cosinus et sinus	1
1.2	Equations et inéquations trigonométriques.	2
2	Formulaires	3
3	Fonction tangente	4
4	Dérivées	4

On se place tout au long de ce chapitre dans le plan euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} , la norme de \vec{u} vaut $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Avant d'aborder les propriétés des fonctions cosinus et sinus (dont les formules trigonométriques), nous allons donner une définition de tous ces éléments via la géométrie euclidienne.

1 Généralités

1.1 Cosinus et sinus

DÉFINITION 1 (Angle géométrique)

Soient A, B, C trois points du plan.

On appelle angle géométrique "ABC", noté \widehat{ABC} , la donnée des points A, B, C dans cet ordre.

DÉFINITION 2 (Cosinus et sinus géométriques)

Soient A, B, C trois points du plan tels que le triangle ABC est rectangle en A .

On définit le cosinus de l'angle \widehat{ABC} et le sinus de l'angle \widehat{ABC} par les deux les deux nombres réels suivants :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}.$$

EXEMPLE 3 — Si ABC est un triangle rectangle en A et isocèle en A , alors on a :

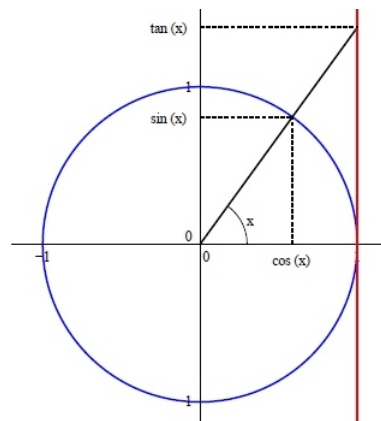
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En effet, avec le théorème de Pythagore on obtient $AB^2 + AC^2 = 2AB^2 = BC^2$.

DÉFINITION 4 (Cercle trigonométrique)

On note \mathcal{C}_0 le cercle trigonométrique, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont la distance à l'origine vaut 1.

$$\mathcal{C}_0 = \{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \|OM\| = 1\} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$



Le cercle trigonométrique, et la position de $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$.

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π .

On commence par définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel x dans le cas $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons M l'unique point du cercle trigonométrique

situé dans le quart supérieur droit, tel que l'arc de cercle \widehat{IM} soit de longueur x .

Pour repérer un tel point M en pratique il faut prendre une ficelle de longueur x , placer une extrémité sur I , et l'enrouler sur le cercle trigonométrique. L'autre extrémité sera alors au point M .

DÉFINITION 5 (Cosinus et sinus d'un réel dans $[0, \pi]$)

1. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on note M le point construit précédemment.
On note A le projeté orthogonal de M sur la droite (OI) . On définit alors :
 - $\cos(x)$ comme le nombre $\cos \widehat{OAM}$.
 - $\sin(x)$ comme le nombre $\sin \widehat{OAM}$.
 Comme M est sur le cercle trigonométrique, on a $\cos(x) = OA$ et $\sin(x) = AM$.
2. Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on définit :
 - $\cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$.
 - $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

REMARQUE 6 — On vient de définir deux fonctions, sinus et cosinus, sur l'intervalle $[0, \pi]$.
On a comme valeurs particulières $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$.

DÉFINITION 7 (Fonctions cosinus et sinus)

Étendons ces deux fonctions sur $[-\pi, \pi]$, intervalle centré en 0, avec les conditions suivantes :

- la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)
- la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)

Enfin, nous allons étendre ces fonctions sur \mathbb{R} tout entier avec la condition de 2π -périodicité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

PROPOSITION 8 1. Il est possible d'étendre le domaine de définition des fonctions \cos et \sin à tout \mathbb{R} en les rendant 2π -périodiques.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. (Conséquence de la construction de \cos, \sin et du théorème de Pythagore)

3. Soit $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point du cercle trigonométrique.

Il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. Tout point du cercle trigonométrique a ses coordonnées qui sont le cosinus et le sinus d'un nombre réel.

Avec la méthode de construction de \cos, \sin et le cercle trigonométrique, on peut donner les principaux liens entre différentes valeurs de \cos et \sin .

PROPOSITION 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Avec la propriété de 2π -périodicité de \cos, \sin , nous apportons une propriété mathématique qui permet d'expliquer comment calculer $\cos(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque : la congruence modulo 2π .

1.2 Equations et inéquations trigonométriques.**DÉFINITION 10 (Congruence)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.

On dit que a est congru à b modulo 2π , noté $a \equiv b \pmod{2\pi}$, s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k \cdot 2\pi$.

On peut alors démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ et sur $n \leq 0$ que :

COROLLAIRE 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.

Si a et b sont congrus modulo 2π , alors on a $\cos(a) = \cos(b)$ et $\sin(a) = \sin(b)$.

En général, si l'on veut calculer $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ éventuellement très grand, on cherche $y \in [-\pi, \pi]$ tel que $x \equiv y \pmod{2\pi}$. On a ainsi $\cos(x) = \cos(y)$. Puis, on utilise les autres propriétés de \cos pour obtenir ou approcher la valeur de $\cos(y)$.

Regardons maintenant les équations de la forme $\cos(x) = y$ et $\sin(x) = y$. Ces équations apparaissent fréquemment en géométrie et en analyse.

PROPOSITION 12

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \cos(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_0) = y$.
Et, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}.$$

On a $\cos(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$ ou $x \equiv -x_0 \pmod{2\pi}$.

- Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.

PROPOSITION 13

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \sin(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(x_0) = y$.
Et, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

On a $\sin(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$ ou $x \equiv \pi - x_0 \pmod{2\pi}$.

- Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.

EXERCICE 1 — Résoudre les équations $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 Formulaires

PROPOSITION 14 (Valeurs particulières de \cos et \sin)

On a :

1. $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0. \cos(2\pi) = 1, \sin(2\pi) = 0.$
2. $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$
3. $\cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0.$
4. $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
5. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$
6. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

PROPOSITION 15 (Théorème de Pythagore trigonométrique)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

THÉORÈME 16 (Formules trigonométriques de duplication de l'angle)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2.$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

On utilise parfois $\cos(a)^2 = \frac{\cos(2a)+1}{2}$.

THÉORÈME 17 (Formules d'addition et de soustraction)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{array}{l|l} 1. \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & 3. \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ 2. \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) & 4. \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{array}$$

THÉORÈME 18 (Formules de factorisation)

Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{l|l} 1. \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & 3. \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ 2. \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} & 4. \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{array}$$

THÉORÈME 19 (Formules de développement)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{l|l} 1. \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) & 3. \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \\ 2. \sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) & \end{array}$$

Les formules de factorisation et de développement découlent des formules d'addition et de soustraction.

On utilise souvent ces formules en analyse ou en géométrie, pour transformer un produit de \cos, \sin en une somme ou bien pour transformer une somme de \cos, \sin en un produit.

EXEMPLE 20 — Pour calculer une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$, on va transformer le produit en une somme.

Pour résoudre l'équation $\cos(5x) + \cos(2x) = 0$, on va transformer la somme en un produit.

Nous reverrons les fonctions sinus et cosinus dans la suite du cours, notamment en analyse (calcul de dérivée, limites,...).

3 Fonction tangente

DÉFINITION 21

On définit la fonction tangente, notée \tan , par :

$$\begin{array}{l}] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Autrement dit, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Attention, on ne peut donner un sens à $\tan(x)$ que quand $\cos(x) \neq 0$.

4 Dérivées

PROPOSITION 22

On a les dérivées suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \cos' = \sin. \\ 2. \sin' = \cos. \\ 3. \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}. \end{array}$$

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Connaître les valeurs de cos et de sin pour $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.
- Savoir simplifier les cos/sin en $-x | \pi + x | \frac{\pi}{2} - x$.
- Cercle trigonométrique, sens trigonométrique. Savoir placer les angles particuliers, savoir repérer la position d'un point x pour déterminer son cos et son sin.
- Formule du théorème de Pythagore $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
- Connaître le développement de $\cos(a+b), \sin(a+b)$. Cas particulier $a = b$ pour $\cos(2a), \sin(2a)$.
- Savoir résoudre les équations $\cos(x) = y, \sin(x) = y$.
- Fonction tangente : Définition, valeurs particulières, graphe.
- Connaître les dérivées de cos, sin, tan.