Feuille de TD n° 13

Applications linéaires, Factorisation de polynômes

26 décembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $r \in \mathbb{Q}$ avec $r > 0$. Soit $n \geq 2$. On pose $P(X) = X^n - r$.

1. Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q > 0$ et $pgcd(p, q) = 1$.
   On suppose que la racine n-ème de r n'est pas un rationnel ($r^{\frac{1}{n}} \notin \mathbb{Q}$), et on suppose que n est un nombre premier.
   Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on a $(r^{\frac{1}{n}})^k \notin \mathbb{Q}$. (On pourra raisonner par l'absurde et utiliser des facteurs premiers.)
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q \mid P$.
   Si $\deg(Q) = d$, combien vaut $|Q(0)|$?
4. On suppose encore n premier. Soient $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(X) = Q(X)R(X)$.
   Montrer que l'on a $(Q(0), R(0)) = (r, 1)$,$(r, -1)$,$(-1, r)$, ou $(1, -r)$.
   Combien vaur leur degré ?
5. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ possède des polynômes irréductibles de degré aussi grand que l'on veut.

Exercice 2.
1. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K} \neq 0$.
   Montrer que $P(X)$ est irréductible si et seulement si $P(aX + b)$ est irréductible.
2. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Factoriser $X^n - r$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $n \geq 1$. Est-ce que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $(X + 1)^n - X^n - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 3. Soit $n \geq 1$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $P(X) = (X^2 - 1)^n$.
1. Montrer que pour tout $k \geq 0$, le polynôme $P^{(k)}$ est scindé (ou nul).
2. Quelle est la multiplicité de -1 et 1 dans $P^{(k)}$, pour $k \leq n$?
3. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $P^{(k)}$ possède au moins $2+k$ racines distinctes, situées dans l'intervalle $[-1, 1]$.
4. En déduire que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $P^{(k)}$ possède exactement $2+k$ racines distinctes, situées dans l'intervalle $[-1, 1]$.
5. En déduire que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples, à racines dans $]-1, 1[$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
1. Montrer que P est à coefficients rationnels si et seulement si $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. (On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange)
2. Montrer que le résultat est faux si on remplace "rationnel" par "entiers" (et $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$). (On pourra chercher un contre-exemple en utilisant le petit théorème de Fermat)

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.
1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Soient $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$.
   Déterminer le reste dans la division euclidienne, dans $\mathbb{R}[X]$, de $P(X) = (X\cos(t) + \sin(t))^n$ par $X^2 + 1$.
3. Calculer la valeur de $P(X) = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$ en $1 + \sqrt{2}$. (On pourra utiliser la question 1) ainsi qu'une division euclidienne)

Exercice 6. [Bonus] Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 7. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \mid \ x + y = 0, \ z + t = 0\right\}$$

$$\text{et} \quad G = \text{Vect}\left\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.

2. Déterminer la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.
3. Calculer la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base canonique.

Exercice 8. Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 - \frac{x + y + z}{3} u.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
   Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(v) = v$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
4. Montrer que f est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel, parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?
5. Trouver une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$