Feuille de TD n° 2

(Sous-)Espaces vectoriels, Somme directe

16 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $T > 0$ fixé et $a \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$
2. $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 2\}$
3. $F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ croissante}\}$
4. $F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monotone}\}$
5. $F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\ T-\text{périodique}\}$
6. $F_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ périodique}\}$
7. $F_7 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a\}$

1.& 5. F_1 et F_5 contiennent la fonction nulle et sont stables par combinaison linéaire. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. F_2 ne contient pas la fonction nulle, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Si f et g sont croissantes, $f + g$ est croissante. Mais $f_0 : x \mapsto x$ est croissante et $-f_0 : x \mapsto -x$ n'est pas croissante. F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Si f est monotone alors λf est monotone pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais si $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 0 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ alors f et g sont monotones mais pas $f + g : x \mapsto |x|$. Donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. Soit $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(\pi x)$. f est 2π-périodique et g est 2-périodique. On a alors :
$$\begin{aligned}(f+g)(x) = 2 &\iff \cos x + \cos(\pi x) = 2\\ &\iff \cos x = 1 \text{ et } \cos(\pi x) = 1\\ &\iff x = k\pi \text{ et } \pi x = k'\pi,\ k, k' \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$
Si $k \neq 0$ alors on obtient $\pi = \frac{k'}{k}$, ce qui est impossible car $\pi \notin \mathbb{Q}$. Donc $f + g$ ne prend la valeur 2 qu'une fois, en $x = 0$. Ceci prouve que $f + g$ n'est pas périodique. Donc F_7 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On peut par contre montrer que si f est T-périodique et g est T'-périodique avec $\frac{T}{T'} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$, alors $f + g$ est T''-périodique avec $T'' = qT = pT'$.
7. Si $a = 0$ alors F_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mais si $a \neq 0$, F_8 ne contient pas la suite nulle.

Exercice 2.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire F^c de F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Le vecteur nul n'appartient pas à F^c.

Exercice 3.

1. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\widetilde{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\widetilde{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$. La somme $F + G$ est-elle directe ?

---

1. Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
   - Soit $(x, y) \in F \cap G$:
   $$\begin{cases} x + y &= 0 \quad (L_1) \\ 2x - y &= 0 \quad (L_2) \end{cases} \underset{L_2'=L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} x + y &= 0 \quad (L_1) \\ 3x &= 0 \quad (L_2') \end{cases} \iff x = y = 0.$$
   On a montré que $F \cap G = \{0\}$ donc $F \oplus G$.
   - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(u, v) \in F$ et $(t, z) \in G$ tels que $(x, y) = (u, v) + (t, z)$. On a $u + v = 0$ donc $(u, v) = (u, -u)$. De même, $2t - z = 0$ donc $(t, z) = (t, 2t)$. On cherche donc $u, t \in \mathbb{R}$ qui vérifient le système
   $$\begin{cases} x &= u + t \quad (L_1) \\ y &= -u + 2t \quad (L_2) \end{cases} \underset{L_2'=L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} x &= u + t \quad (L_1) \\ x + y &= 3t \quad (L_2') \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} \frac{2x-y}{3} &= u \quad (L_1) \\ \frac{x+y}{3} &= t \quad (L_2') \end{cases}.$$
   Donc si $t = \frac{x+y}{3}$ et $u = \frac{2x-y}{3}$, alors $(x, y) = \underbrace{(u, -u)}_{\in F} + \underbrace{(t, 2t)}_{\in G}$ et $F + G = \mathbb{R}^2$.

Finalement, F et G sont supplémentaires.

2. On a : $(0,0,1) \in \widetilde{F} \cap \widetilde{G}$ donc $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ ne sont pas en somme directe.

Exercice 4.

1. La famille $((1,2,1),(1,1,3),(3,-2,1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $((1,0,3),(0,1,2),(2,-3,0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

---

1. Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,3)+\nu(3,-2,1)=0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda+\mu+3\nu = 0 & (L_1) \\ 2\lambda+\mu-2\nu = 0 & (L_2) \\ \lambda+3\mu+\nu = 0 & (L_3) \end{cases} \underset{\substack{L_2'=L_2-2L_1 \\ L_3'=L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu = 0 & (L_1) \\ -\mu-8\nu = 0 & (L_2') \\ 2\mu-2\nu = 0 & (L_3') \end{cases}$$

$$\underset{L_3''=L_3'+2L_2'}{\iff} \begin{cases} \lambda+\mu+3\nu = 0 & (L_1) \\ -\mu-8\nu = 0 & (L_2') \\ -18\nu = 0 & (L_3'') \end{cases}$$

$$\iff \lambda=\mu=\nu=0.$$

Donc la famille est libre.

2. Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda(1,0,3)+\mu(0,1,2)+\nu(2,-3,0)=0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda+2\nu = 0 & (L_1) \\ \mu-3\nu = 0 & (L_2) \\ 3\lambda+2\mu = 0 & (L_3) \end{cases} \underset{L_3'=L_3-3L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda+2\nu = 0 & (L_1) \\ \mu-3\nu = 0 & (L_2) \\ 2\mu-6\nu = 0 & (L_3') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -2\nu & (L_1) \\ \mu = 3\nu & (L_2) \end{cases}.$$

Donc si on prend par exemple $\nu=1$, on a $-2(1,0,3)+3(0,1,2)+(2,-3,0)=0$ et la famille est liée.

Exercice 5.
Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ et $G=\operatorname{vect}((1,1,0),(1,0,0))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de $F\cap G$.

On a $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-x\}=\{(x,-x,z)\mid x\in\mathbb{R},\, z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{vect}((1,-1,0),(0,0,1))$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
De plus $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$. En effet, tout élément de G a une troisième coordonnée nulle. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ avec $z=0$, alors $(x,y,0)=y(1,1,0)+(x-y)(1,0,0)\in G$.
Finalement, $(x,y,z)\in F\cap G \iff x+y=0$ et $z=0$. Donc $F\cap G=\operatorname{vect}((1,-1,0))$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.
Soit $\mathcal{P}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On montre comme d'habitude que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par combinaison linéaire.
Soit $f\in\mathcal{P}\cap\mathcal{I}$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=-f(x)$ et donc $f=0$. Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe.
Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$. Alors g est paire, h est impaire et $g+h=f$. Donc $\mathcal{P}+\mathcal{I}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on nécessairement $H\cap(F+G)=(H\cap F)+(H\cap G)$?

- L'inclusion $(H\cap F)+(H\cap G)\subset H\cap(F+G)$ est toujours vraie. En effet, soit $x=u+v\in(H\cap F)+(H\cap G)$ avec $u\in H\cap F$ et $v\in H\cap G$. Alors $u,v\in H$ donc $x\in H$ et $u\in F$, $v\in G$ donc $x\in F+G$.
- Prenons dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces $F=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $G=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $H=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Alors $F+G=\mathbb{R}^2$ et donc $H\cap(F+G)=H$. Or $H\cap F=H\cap G=\{0\}$ donc $(H\cap F)+(H\cap G)=\{0\}$.

Exercice 8. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F\oplus G=E$ et $F\subset H$. Montrer que $H=F\oplus(G\cap H)$.

- Montrons que F et $G\cap H$ sont en somme directe : soit $x\in F\cap G\cap H$ alors $x\in F\cap G=\{0\}$ donc $x=0$.
- Soit $x\in F+(G\cap H)$: il existe $u\in F$ et $v\in G\cap H$ tels que $x=u+v$. $F\subset H$ donc $u\in H$ et $v\in H$ donc $x\in H$. D'où : $F+(G\cap H)\subset H$.
- Soit $x\in H$. Puisque $H\subset E=F+G$, il existe $u\in F$ et $v\in G$ tels que $x=u+v$. Or $u\in F\subset H$ donc $v=x-u\in H$ et donc $v\in G\cap H$. Donc $H\subset F+(G\cap H)$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 9. Montrer que 41 et 101 sont premiers.
Est-ce que 51 est premier ? Et 103 ?

• On a $\sqrt{41} < 7$. Les nombres premiers $2, 3, 5$ ne divisent pas 41, donc 41 est premier.
On a $\sqrt{101} < 11$. Les nombres premiers $2, 3, 5, 7$ ne divisent pas 101, donc 101 est premier.
• On a $51 = 3.17$, donc 51 n'est pas premier.
On a $\sqrt{103} < 11$. Les nombres premiers $2, 3, 5, 7$ ne divisent pas 103, donc 103 est premier.
(on appelle 101 et 103 des nombres premiers jumeaux, comme 5 et 7 ou 41 et 43).

Exercice 10. Simplifier $2021^{2021} \bmod 3$ Simplifier $7^{7^7} \bmod 5$.

• Comme 3 ne divise pas 2021, on a $2021^2 \equiv 1 \bmod 3$ d'après le petit théorème de Fermat.
Donc, $2021^{2021} = (2021^2)^{1000}.2021 \equiv 2021 \bmod 3 \equiv 2 \bmod 3$.
• Comme 5 et 7 sont premiers, ils sont premiers entre eux. D'après le petit théorème de Fermat, on a $7^4 \equiv 1 \bmod 5$.
On regarde donc le reste de la division euclidienne de 7^7 par 4. On calcule ce reste avec une congruence modulo 4. On a $7 \equiv 3 \bmod 4 \equiv -1 \bmod 4$, donc $7^7 \equiv (-1)^7 \bmod 4 \equiv -1 \bmod 4 \equiv 3 \bmod 4$.
Ainsi, on a $7^7 = 4q + 3$, avec un $q \in \mathbb{N}$. Cela donne : $7^{7^7} = 7^{4q+3} = (7^4)^q.7^3 \equiv 7^3 \bmod 5$.
Puis, $7 \equiv 2 \bmod 5$ donc $7^3 \equiv 8 \bmod 5 \equiv 3 \bmod 5$.
Donc, $7^{7^7} \equiv 3 \bmod 5$, c'est-à-dire que $7^{7^7} = 5q + 3$, $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11. Calculer $d = \text{pgcd}(26, 133)$. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $26.u + 133.v = d$.
Montrer que l'on a $\text{pgcd}(u, v) = 1$.

On applique l'algorithme d'Euclide étendu.
• On commence par l'algorithme d'Euclide :
$133 = 26.5 + 3$
$26 = 3.8 + 2$
$3 = 2.1 + 1$
$2 = 2.1 + 0$
Ainsi, on a $\text{pgcd}(26, 133) = 1$. (Comme 3 est premier et ne divise pas 26, on peut voir aussi que $\text{pgcd}(133, 26) = \text{pgcd}(26, 3) = 1$)
• Trouvons alors u et v :
$26 = 133.0 + 26.1$
$3 = 133.1 - 26.5$
$2 = 26.1 - 3.8 = 133.(-8) + 26.41$
$1 = 3.1 - 2.1 = 133.(1 - (-8)) + 26.(-5 - 41) = 133.9 - 46.26$.
• Soit e un diviseur commun de u et de v. Alors $d.e$ divise $26.u$ et $133.v$. Donc, $d.e$ divise $26.u + 133.v = d$. Comme $d \neq 0$ on en déduit que $e = 1$ ou -1.
Donc, $\text{pgcd}(u, v) = 1$. (Ce résultat ne dépend pas de la valeur de u et de v calculée, ni de la valeur de $\text{pgcd}(26, 133)$)