Feuille de TD n° 5

Systèmes linéaires, Espaces affines / vectoriels

15 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
- Les matrices M suivantes sont-elles échelonnées ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

$E = \mathrm{Diag}\,(1, \dots, n)$

- Pour chaque matrice M échelonnée, résoudre le système linéaire $MX = Y$, en fonction du vecteur colonne Y.

Les matrices A, C et E sont échelonnées, et les matrices B et D ne le sont pas.

Exercice 2. Echelonner les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
On considère les systèmes linéaires :

$$(S)\ AX = Y,$$

$$(S')\ AX = 0.$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (S') forme un sous-ev de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
2. Exprimer l'ensemble des solutions de (S) en fonction de l'ensemble des solutions de (S').
   Montrer que cet ensemble est soit vide, soit réduit à un seul vecteur, soit possède une infinité de solutions.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \pi \\ -3\pi + e \end{pmatrix}$.
   Résoudre le système $AX = Y$.

---

1. On constate que le vecteur colonne nul, 0, est une solution de (S'). Ensuite, pour X_1, X_2 des solutions de (S') et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A(X_1 + \lambda X_2) = AX_1 + \lambda AX_2 = 0$.
   L'ensemble des solutions de (S') est donc bien un sous-ev de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

2. Soit E l'ensemble des solutions de (S). Si cet ensemble est vide, il n'y a rien à dire de plus.
Si cet ensemble n'est pas vide, soit $X_0 \in E$. Pour $X \in E$ une autre solution de (S), on a $AX_0 = Y = AX$. On a donc $A(X - X_0) = Y - Y = 0$.
Ainsi, $X - X_0$ est une solution de (S').
Réciproquement, pour X' une solution de (S'), on a $A(X' + X_0) = AX' + AX_0 = 0 + Y = Y$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) est exactement :
$$E = \{X_0 + X',\, X' \text{ solution de } (S')\} = X_0 + \{ \text{ solutions de } (S')\}.$$
On remarque alors que si E est non-vide, c'est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (somme d'un sous-ev et d'un vecteur).
Si l'ensemble des solutions de (S') est réduit à $\{0\}$, alors on a $E = \{X_0\}$. Cet ensemble est réduit à un vecteur.
Sinon, l'ensemble des sol. de (S') est un sous-ev de dimension au moins 1. Comme $\mathbb{K}$ contient une infinité d'éléments, un sous-ev de dimension non-nulle contient une infinité de vecteurs. Donc E possède une infinité de vecteurs.
3. On remarque que pour $X_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $AX_0 = Y$.
On se ramène donc à résoudre l'équation $AX = 0$. On a :
$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 0 + 5x_3 & = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 0 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 + 0 + 5x_3 & = 0 \\ 0 + x_2 + 15x_3 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 & = -5x_3 \\ x_2 & = -15x_3 \end{array}\right.$$
L'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$ est $\{{}^t(-5x_3, -15x_3, x_3),\, x_3 \in \mathbb{K}\} = \operatorname{Vect} {}^t(-5, -15, 1)$. L'ensemble des solutions de l'équation $AX = Y$ est donc $X_0 + \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^2 = -I_n$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Pour $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, résoudre l'équation $AX = Y$.

---

1. On a $I_n = -A^2 = (-A)A = A(-A)$. Donc A est inversible, d'inverse $-A$.
2. Comme A est inversible, on a $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$. L'équation $AX = Y$ possède donc une unique solution, qui est $A^{-1}Y = -AY$.
Dans cette siuation (A inversible, et A^{-1} est connu), on a pu résoudre le système linéaire directement.

■ *Pour aller plus loin . . .*

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces affines de l'espace vectoriel E ? Si oui, donner leur direction et leur dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_1 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 0\}$;
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_2 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y = 4\}$;
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}_3 = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y \neq 0\}$;
4. $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{F}_4 = \{u \in E \mid u_1 + u_2 = 2\}$.

---

1. $\mathcal{F}_1 = \operatorname{vect}((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$ est un sous-espace vectoriel donc un sous-espace affine de direction lui-même. On a $\dim \mathcal{F}_1 = 2$.
2. $\mathcal{F}_2 = \{4\} + \mathcal{F}_1$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{F}_1$ et de dimension 2.
3. $\mathcal{F}_3$ n'est pas un sous-espace affine car il n'existe pas de vecteur $a \in E$ tel que $\mathcal{F}_3 - \{a\}$ soit un sous-espace vectoriel.
4. Soit $(u_n)_n$ un suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $k \geq 2$, $u_k = 0$. Soit $F_4 = \{u \in E \mid u_1 + u_2 = 0\}$, F_4 est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Alors $\mathcal{F}_4 = u + F_4$ est un hyperplan affine de E.

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F_1 et F_2. On suppose que $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_1$, c'est-à-dire que $F_1 \subset F_2$. Démontrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Supposons que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, alors il existe $a \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. On a donc :
$$\mathcal{F}_1 = a + F_1 \subset a + F_2 = \mathcal{F}_2.$$

Exercice 7.
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Il est clair que la fonction nulle est dans E et que E est stable par combinaison linéaire, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si $f \in E$ alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0, \\ cx+d & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Or f est continue donc on doit avoir $b = d$. On a donc $f = af_1 + bf_2 + cf_3$, avec

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_3(x) = 1.$$

De plus, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre donc c'est une base de E.

Exercice 8. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_p + a).$$

1. Montrer que
$$F_a \oplus G = E.$$
2. Soient $a, b \in G$. Montrer
$$a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b.$$

1.
   - Montrons que $F_a \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F_a \cap G$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
   $$x = \lambda_1(e_1 + a) + \ldots + \lambda_p(e_p + a) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)a.$$
   De plus, x appartient à G. D'où $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)a$ appartient à G. Or a appartient à G. Donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$ appartient à G.
   Mais F et G sont supplémentaires dans E donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0$. La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$. D'où $x = 0$.
   - Montrons que $F_a \oplus G = E$. Soit $x \in E$. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $y \in G$ tels que
   $$\begin{array}{rcl} x & = & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + y \\ & = & \underbrace{\lambda_1(e_1 + a) + \ldots + \lambda_p(e_p + a)}_{\in F_a} + \underbrace{(y - (\lambda_1 a + \ldots + \lambda_p a))}_{\in G} \end{array}.$$
   D'où x appartient à $F_a \oplus G$.
2. Supposons que $F_a = F_b$. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que
$$e_1 + a = \lambda_1(e_1 + b) + \ldots + \lambda_n(e_n + b).$$
D'où
$$G \ni a - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)b = (\lambda_1 - 1)e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in F.$$
Donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (1, 0, \ldots, 0)$. D'où $a = b$.

Exercice 1 :

- On a $AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = y_1 \\ 2x_2 - 4x_3 = y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 3x_2 - 5x_3 = y_1 - \frac{3}{2}y_2 - 11x_3 \\ x_2 = y_2 \times \frac{1}{2} + 2x_3 \end{cases}$$

L'ensemble des sol. est

$$\left\{ \left(y_1 - \frac{3}{2}y_2 - 11x_3 ; \frac{1}{2}y_2 + 2x_3 ; x_3\right) ; x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left(y_1 - \frac{3}{2}y_2 ; \frac{1}{2}y_2 ; 0\right) + \left\{ (-11x_3 ; 2x_3 ; x_3) ; x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left(y_1 - \frac{3}{2}y_2 ; \frac{1}{2}y_2 ; 0\right) + \mathrm{Vect}\left((-11 ; 2 ; 1)\right)$$

- On a $CX = Y \iff (1\ 2\ \cdots\ n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1)$

$$\iff \left\{ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = y_1 \right.$$

$$\iff x_1 = y_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(y_1 - \sum_{k=2}^{n} k x_k ; x_2 ; \ldots ; x_n\right) ; x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$

$$= (y_1 ; 0 ; \ldots ; 0) + \left\{ \left(-\sum_{k=2}^{n} k x_k ; x_2 ; \ldots ; x_n\right) ; x_2 ; \ldots ; x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= (y_1 ; 0 ; \ldots ; 0) + \mathrm{Vect}\left((-2 ; 1 ; \ldots ; 0) ; (-3 ; 0 ; 1 ; 0 ; \ldots ; 0) ; \ldots ; (-n ; 0 ; \ldots ; 0 ; 1) \right)$$

$= (y_1 ; 0 ; \dots ; 0) + \mathrm{Vect}\left(-2e_1 + e_2 ; -3e_1 + e_3 ; \dots ; -n e_1 + e_n \right)$

- On a $EX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ 2x_2 = y_2 \\ \vdots \\ n x_n = y_n \end{cases}$ L'ensemble des sol est $\left\{ \left(y_1 ; \frac{y_2}{2} ; \dots ; \frac{y_n}{n} \right) \right\}$.

Exercice 2 :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9}{13} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{13} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

5) $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - aL_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 2-3a^2 \end{pmatrix}$

- Si $2-3a^2 = 0 \iff a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, cela donne :

$\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice échelonnée avec 1 ligne non-nulle.

- Si $2-3a^2 \neq 0$, cela donne :

$\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 2-3a^2 \end{pmatrix}$ matrice échelonnée avec 2 lignes non-nulles.

6) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$