Feuille de TD n° 9

Polynômes, Applications linéaires

17 novembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Calculer $\deg(P \circ Q)$.
2. On pose $f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P \circ Q \in \mathbb{K}[X]$.
   Pour quelles valeurs de Q la fonction f est-elle injective ? surjective ?

---

1. Si $P = 0$ on a $P \circ Q = 0$, de degré $-\infty$.
   Si $Q = b_0$ on a $P \circ Q = P(b_0)$, de degré 0 ou $-\infty$.
   Si $P \neq 0$ et $\deg(Q) > 0$, avec $P(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$ et $Q(X) = b_0 + \ldots + b_m X^m$, $b_m \neq 0$, $m \geq 1$, on a :
   $P(Q(X)) = a_0 + \ldots + a_n Q(X)^n$.
   Le terme de plus haut degré de ce polynôme est $a_n b_m^n (X^m)^n = a_n b_m^n X^{mn}$.
   Comme $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, ce polynôme est de degré mn, c'est-à-dire $\deg(P).\deg(Q)$.
2. • Si $Q(X) = b_0$, la fonction f n'est pas injective et pas surjective. On a $f(\mathbb{K}[X]) = Vect(1)$, et $f(0) = f(X - b_0)$.
   • Si $\deg(Q) > 0$, la fonction f est injective.
   En effet, on a $f(P) = f(R) \Leftrightarrow P \circ Q = R \circ Q \Leftrightarrow (P - R) \circ Q = 0$.
   D'après la question précédente, on a $\deg((P - R) \circ Q) = -\infty$ avec $\deg(Q) > 0$ si et seulement si $P - R = 0$, si et seulement si $P = R$.
   • Si $\deg(Q) > 1$, la fonction f n'est pas surjective.
   En effet, $P \circ Q$ est soit un polynôme constant, soit un polynôme dont le degré est $2\deg(P)$. Donc les polynômes de degré impair ne sont pas dans l'image de f.
   • Si $\deg(Q) = 1$, la fonction f est surjective.
   On a $Q(X) = b_0 + b_1 X$, avec $b_1 \neq 0$. Pour $R(X) = \frac{1}{b_1} X - \frac{b_0}{b_1}$, on a $R \circ Q(X) = X$.
   Ainsi, pour tout polynôme P, on a $f(P \circ R) = P \circ R \circ Q = P(R(Q(X))) = P(X)$.
   Donc, $f(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2.
Soit $f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(0) \in \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
Que vaut $f^{-1}(\{a\})$?
Montrer que cet ensemble est un sous-espace affine, et calculer sa dimension.

Pour $P(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$, on a $f(P) = P(0) = a_0$.
Donc, $f^{-1}(\{a\}) = \{a + a_1 X + \ldots + a_n X^n,\ \text{avec } n \geq 1 \text{ et } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$.
Ainsi, on a $f^{-1}(\{a\}) = a + Vect(X, X^2, X^3, \ldots)$.
Cet ensemble est bien un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$, de dimension infinie.

Exercice 3.
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \geq 1$.
La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$ est-elle une base de $\mathbb{K}_n[X]$?

Oui. Cette famille est libre avec $n + 1$ vecteurs, et est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Pour cela, on montre par récurrence sur $n \geq 0$ que $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$ est libre.
En effet, cela est vrai pour $n = 0$.
Supposons cela vrai pour un certain $n \geq 0$. La famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$ est contenue dans le sous-ev $\mathbb{K}_n[X]$. Le polynôme $(X - a)^{n+1}$ est de degré $n + 1$, donc n'appartient pas à $\mathbb{K}_n[X]$, donc il n'est pas combinaison linéaire des $(X - a)^k$, $0 \leq k \leq n$.
Ainsi, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^{n+1})$ reste libre.
Cela termine la récurrence.

Exercice 4.
Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

Soit P tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
En regardant les degrés, on a :

$$2.\deg(P) = \deg(P(X^2)) = \deg((X^2 + 1)P(X)) = 2 + \deg(P)$$

On en déduit donc que l'on a soit $P = 0$ ($\deg(P) = -\infty$), soit $\deg(P) = 2$.
Supposons P de degré 2. Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a : $0 = P(X^2) - (X^2 + 1)P(X) = aX^4 + bX^2 + c - (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c) = (aX^4 + bX^2 + c) - (aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c)$

$$\Leftrightarrow 0 = -bX^3 + (-a+b-c)X^2 - bX \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -b & = & 0 \\ -a+b-c & = & 0 \\ -b & = & 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow b = 0$ et $c = -a$

$\Leftrightarrow P(X) = a(X^2-1)$

L'ensemble des solutions de cette équation est ainsi $Vect(X^2-1)$.

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}[X]$ soit le sous-ensemble H des polynômes P tels que $\int_0^1 P(t)dt = 0$, et soit C le sous-ensemble des polynômes constants.

1. Montrer que C et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = H \oplus C$.

---

1. On a $C = Vect(1)$, donc C est un sous-ev de $\mathbb{R}[X]$.
   On a $0 \in H$. Soient $P, Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a $\int_0^1 (P+\lambda Q)(t)dt = \int_0^1 P(t)dt + \lambda \int_0^1 Q(t)dt = 0$. Donc, H est un sous-ev de $\mathbb{R}[X]$.
2. On a $C \cap H = \{0\}$ car pour $Q(X) = b$, on a $\int_0^1 Q(t)dt = b$.
   Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a = \int_0^1 P(t)dt$.
   On a $P(X) = a + (P(X) - a)$.
   On remarque que $a \in C$, et que $\int_0^1 P(t) - adt = \int_0^1 P(t)dt - a = 0$, donc $P(X) - a \in H$.
   Ainsi, on a bien $\mathbb{R}[X] = H \oplus C$.

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 6.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

---

1. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et on a donc
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + x_3\varphi(e_3) \\ &= (-x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2)\,. \end{aligned}$$
2. Déterminons le noyau de φ :
$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + 2x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = 0 \end{array} \right.$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + 2x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_3 & = \frac{1}{2}x_1 \\ x_2 & = -x_1 \end{array} \right. .$$
   On en déduit que $\ker \varphi = \operatorname{vect}((2,-2,1))$.
   Déterminons maintenant l'image de φ : soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$,
$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + 2x_3 & = y_1 \\ x_2 + 2x_3 & = y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 & = y_3 \end{array} \right.$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} -x_1 + 2x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = y_2 - y_1 \\ x_1 + x_2 & = \frac{1}{2}y_3 \end{array} \right. .$$
   Donc il existe $x \in \mathbb{K}^3$ tel que $\varphi(x) = y$ si et seulement si $y_3 = 2(y_2 - y_1)$ et dans ce cas, $\varphi\left((1, \frac{1}{2}y_3 - 1, \frac{y_1+1}{2})\right) = y$. On a donc
$$\operatorname{Im} \varphi = \left\{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{K}^3 \mid y_3 = 2(y_2 - y_1)\right\} = \operatorname{vect}((1,0,-2),(0,1,2))\,.$$

Exercice 7.

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

- Soit $x \in \ker u$, on a $u(x) = 0$. Donc $v(u(x)) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(v \circ u)$.
- Soit $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $v \circ u(x) = y$. On a donc $v(u(x)) = y$ et $y \in \operatorname{Im} v$.