Feuille de TD n° 1

Relations binaires, Dénombrement

4 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence ? Préciser si la relation d'ordre est totale ou partielle.

1. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x<y$, sur $\mathbb{R}$
2. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*,$ t.q. $x=y^n$, sur $\mathbb{N}$
3. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, y=x^n$, sur $\mathbb{N}$
4. $z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow \Re e(z) \leq \Re e\left(z'\right)$ et $\Im m(z) \leq \Im m\left(z'\right)$
5. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x),$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
6. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x),$ sur $[0,1]^{\mathbb{R}}$
7. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, f(x)=g(x),$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
8. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

---

1. La relation est transitive, mais ni réflexive ni symétrique.
2. La relation est transitive, réflexive, antisymétrique. C'est une relation d'ordre. Elle est partielle car 2 et 3 ne sont pas comparables par exemple.
3. La relation est transitive, réflexive, antisymétrique. C'est une relation d'ordre. Elle est partielle car 2 et 3 ne sont pas comparables par exemple.
4. La relation est transitive, réflexive, antisymétrique. C'est une relation d'ordre. Elle est partielle car 1 et i ne sont pas comparables par exemple.
5. La relation est transitive, réflexive, mais pas antisymétrique ni symétrique.
6. La relation est transitive, réflexive, antsymétrique. C'est une relation d'ordre. Elle est partielle car $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1-x$ ne sont pas comparables par exemple.
7. La relation est transitive, réflexive, symétrique, (et aussi antisymétrique). C'est une relation d'équivalence.
   C'est la relation d'égalité de fonctions.
8. La relation est transitive, réflexive, mais pas symétrique ni antisymétrique.

Exercice 2.
Soit E un ensemble. Montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est à la fois une relation d'équivalence et d'ordre si et seulement si les classes d'équivalence de tout élément est un singleton.

Soient $x,y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$. Par symétrie, on a alors $y\mathcal{R}x$.
Comme $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, on a alors par antisymétrie que $y=x$.
Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ ssi $x=y$.
Donc, la relation $\mathcal{R}$ est exactement la relation d'égalité. Ses classes d'équivalences sont donc réduites à un seul élément : $C(x)=\{x\}$.

Exercice 3.
On munit $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$:
$(p_1,q_1)\,\mathcal{R}\,(p_2,q_2) \Longleftrightarrow p_1\cdot q_2 = p_2\cdot q_1$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1,5)$.
3. On note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.
   Montrer que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Remarque : Cette méthode est la façon la plus simple de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$. La bijection prouve que toutes les constructions de $\mathbb{Q}$ possibles donnent le "même" ensemble.

---

1. On montre facilement que $\mathcal{R}$ est symétrique et réflexive.
   Reste la transitivité. Si $(p_1,q_1)\mathcal{R}(p_2,q_2)$ et $(p_2,q_2)\mathcal{R}(p_3,q_3)$, alors on a :
   $$p_1q_3=\frac{p_1q_2q_3}{q_2}=\frac{p_2q_1q_3}{q_2}=\frac{q_2p_3q_1}{q_2}=p_3q_1,$$
   donc on a bien obtenu $(p_1,q_1)\mathcal{R}(p_3,q_3)$.
   Cette relation est bien une relation d'équivalence.
2. On a $(p,q)\mathcal{R}(1,5)$ ssi $5p=q$.
   Comme on doit avoir $q>0$, on a donc $C((1,5))=\{(p,5p),\ p\in\mathbb{N}^*\}$.

3. On pose la fonction $f : E/\mathcal{R} \to \mathbb{Q}$ par $f(C((p,q))) = \frac{p}{q}$.
Montrons que cette fonction est bien définie.
Si $(p_1,q_1)\mathcal{R}(p_2,q_2)$, alors on a $q_1, q_2 \neq 0$, et par définition on obtient $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$.
L'image d'une classe d'équivalence ne dépend pas du représentant de la classe d'équivalence que l'on choisit. Donc, la fonction f est bien définie.
Montrons que f est bijective.
On remarque que f est surjective, car pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (avec $q > 0$) on a $\frac{p}{q} = f(C((p,q)))$.
Ensuite, on a $f(C((p,q))) = f(C((p',q')))$ ssi $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ ssi $pq' = p'q$, ssi $C((p,q)) = C((p',q'))$. Donc f est bien injective.
Ainsi, la fonction f est bien une bijection.

Exercice 4.
On pose sur $(\mathbb{R}^2)^*$: $\vec{u}\mathcal{R}\vec{v} \iff \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\vec{u} = (-2,1)$.

---

1. La matrice $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, qui est la matrice de la famille (u,v) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, n'est pas inversible si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires (ssi $v = \lambda u$ pour un $\lambda \neq 0$, car $u, v \neq 0$).
On montre ainsi facilement que $\mathcal{R}$ est une relation symétrique et réflexive. De même, si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$, alors w est colinéaire à v et v est colinéaire à u.
Com u, v, w sont non-nuls, on en déduit (chapitre E.v.) que u et w sont colinéaires, donc que $u\mathcal{R}w$.
Ainsi, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. D'après la question précédente, la classe d'équivalence de $(-2,1)$ est exactement $Vect((-2,1)) \setminus \{0\}$, l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(-2,1)$ et non-nuls.

Exercice 5.
On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par :
$(a,b) \preceq (c,d) \iff [a < c$ ou $a = c$ et $b \leq d]$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?
L'ensemble $\mathbb{N}^2$ a-t-il un plus grand élément ?
2. Les parties $A = \{(p,p), p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2, 10^p), p \in \mathbb{N}\}$ sont-elles majorées ?
Si oui, ont-elles un plus grand élément ?
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ a un plus petit élément.

---

1. La relation est réflexive. On montre facilement qu'elle est transitive et antisymétrique. C'est donc une relation d'ordre.
• Cette relation d'ordre est totale.
Pour (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{N}^2$, on distingue deux cas :
Si $a < c$ ou $a = c$ et $b \leq d$, alors $(a,b) \preceq (c,d)$.
Sinon, on a $a > c$ ou $a = c$ et $b > d$. On a alors $(c,d) \preceq (a,b)$.
Les éléments $(a,b), (c,d)$ sont donc toujours comparables pour $\preceq$. • L'ensemble $\mathbb{N}^2$ n'a pas de plus grand élément. Supposons par l'absurde avoir (a,b) un plus grand élément de $\mathbb{N}^2$ pour la relation $\preceq$.
D'après la définition de la relation, on a $(a,b) \preceq (a+1,b)$. Cela contredit le fait que (a,b) est un plus grand élémnt.
2. La partie A n'est pas majorée. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on a $(a,b) \preceq (a+1, a+1)$ avec $(a+1,a+1) \in A$, donc aucun élément de $\mathbb{N}^2$ ne majore tous les éléments de A.
La partie A ne possède donc pas de plus grand élément.
La partie B est majorée, par $(3,0)$ par exemple.
La partie B ne possède pas de plus grand élément. En effet, tout $(2,10^p) \in B$ est plus petit que $(2,10^{p+1}) \in B$, donc il n'existe aucun élément de B qui est plus grand que tous les autres.
3. Soit E une partie non-vide de $\mathbb{N}^2$.
Alors, $E_1 = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $\exists m \in \mathbb{N}$ avec $(m,n) \in E\}$ est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. (C'est l'image de E par la fonction $f : (n,m) \mapsto n$)
D'après les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$, la partie E_1 possède un plus petit élément. Notons-le n_0.
On pose alors $E_2 = \{m \in \mathbb{N}$ tels que $(n_0, m) \in E\}$.
De même, E_2 est une partie non-vide de $\mathbb{N}$. Elle possède donc d'après le cours un plus petit élément. Notons-le m_0.
On a alors $(n_0, m_0) \in E$, et pour tout $(n,m) \in E$ on a $n_0 \leq n$ ou $n = n_0$ et $m_0 \leq m$.
On en déduit donc que $(n_0, m_0) \preceq (n,m)$ pour tout élément (n,m) de E.
Donc, E possède un plus petit élément.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6.
Soient A et B deux parties de E et F. Soit f une application de E dans F. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F.

1. Vrai. Notons n le cardinal de A. On peut alors écrire $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Donc $f(A) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ et $\mathrm{card}(f(A)) \leq n$. Donc $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Faux. Il suffit de prendre E une partie infinie, $A = E$ et choisir une fonction constante. Dans ce cas, $f(A)$ est un singleton, de cardinal 1.
   Par exemple, on prend $E = F = \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $n \longmapsto 0$. Alors $f(E) = \{0\}$ est une partie finie (de cardinal 1) de F mais $\mathbb{N}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
3. Faux. Le même contre-exemple qu'à la question précédente convient. On prend $E = F = \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $n \longmapsto 0$ et $B = \{0\} \subset \mathbb{N}$ de cardinal 1. On a $f^{-1}(B) = \mathbb{N}$ qui est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
4. Faux. On prend $E = F = \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $B = \mathbb{N}^*$. Alors $f^{-1}(B) = \{1\}$ est fini (de cardinal 1) et B est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
   On pouvait aussi prendre pour f la fonction $n \longmapsto 0$ et $f^{-1}(\mathbb{N}^*) = \emptyset$ qui est une partie finie, de cardinal 0.

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer le nombre de couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq j \leq n$.
   (b) Calculer le nombre de triplets d'entiers (i, j, k) tels que $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$.
   On pourra utiliser la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   (c) On lance 3 dés (à 6 faces) et on range les chiffres obtenus dans l'ordre croissant. Combien de résultats différents sont possibles ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer le nombre de couples d'entiers naturels $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = n$.
   (b) Calculer le nombre de couples d'entiers naturels $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + 2j = n$.

---

1. (a) Il y a n choix pour j, puis j choix pour i. Le nombre de possibilités est donc

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   (b) Soit T ce nombre de triplets. On choisit d'abord $k \in [\![1, n]\!]$, il reste à choisir un couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq j \leq k$, on obtient

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}.$$

   On obtient donc

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

   Remarque : *On remarque que le résultat obtenu est égal à* $\binom{n+2}{3}$*. Voici une méthode combinatoire : on définit* $X = [\![1, n]\!] \cup \{a, b\}$ *et on choisit trois éléments dans* X*, il y a bien sûr* $\binom{n+2}{3}$ *possibilités. Ceci est équivalent à notre problème : si on choisit trois éléments dans* $[\![1, n]\!]$*, cela correspond à un triplet de trois chiffres distincts ; si on choisit deux éléments dans* $[\![1, n]\!]$ *et* a*, cela correspond à un triplet* (i, i, k) *; si on choisit deux éléments dans* $[\![1, n]\!]$ *et* b*, cela correspond à un triplet* (i, k, k) *; enfin si on choisit un élément dans* $[\![1, n]\!]$ *et* a*,* b*, cela correspond à un triplet* (i, i, i)*.*

   (c) Cela revient à chercher le nombre de triplets précédents, on applique donc la formule pour $n = 6$ et on trouve 56 possibilités.
2. (a) Il y a $n + 1$ choix possibles pour i. Une fois que i est choisi, il n'y a qu'une possibilité pour j. Au total, on a donc $n + 1$ couples.
   (b) i doit être de la même parité que n.
   — Si n est pair, on a $\frac{n}{2} + 1$ couples.
   — Si n est impair, on a $\frac{n+1}{2}$ couples.

Exercice 8.

Soit p_n le nombre de mots de n lettres, formés uniquement des lettres "a" et "b", et qui ne contiennent pas deux "a" consécutifs. Par exemple, $p_3 = 5$ car les mots possibles sont "aba", "abb", "bab", "bba" et "bbb".

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par p_n.
2. En déduire p_n.

---

1. Supposons que $n \geq 3$. Les mots de n lettres recherchés commencent soit par "a", soit par "b".
   — Si un mot commence par "b", il reste ensuite à choisir un mot de $n - 1$ lettres qui vérifie les mêmes hypothèses.
   — Si un mot commence par "a", la deuxième lettre est nécessairement "b". Il reste ensuite à choisir un mot de $n - 2$ lettres qui vérifie les mêmes hypothèses.

   On obtient donc $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$.

2. On a de plus $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$. Donc en notant (F_n) la suite de Fibonacci, on a $p_n = F_{n+2}$. D'où

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$