Feuille de TD n° 1

Relations binaires, Dénombrement

4 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence ?
Préciser si la relation d'ordre est totale ou partielle.

1. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x<y$, sur $\mathbb{R}$
2. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*,$ t.q. $x=y^n$, sur $\mathbb{N}$
3. $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*, y=x^n$, sur $\mathbb{N}$
4. $z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow \Re e(z)\leq \Re e(z')$ et $\Im m(z)\leq \Im m(z')$
5. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x\in[0,1], f(x)\leq g(x),$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
6. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x\in[0,1], f(x)\leq g(x),$ sur $[0,1]^{\mathbb{R}}$
7. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \forall x\in\mathbb{Z}, f(x)=g(x),$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
8. $f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f(\mathbb{R})\subset g(\mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 2.
Soit E un ensemble. Montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ sur E est à la fois une relation d'équivalence et d'ordre si et seulement si les classes d'équivalence de tout élément est un singleton.

Exercice 3.
On munit $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$:
$(p_1,q_1)\,\mathcal{R}\,(p_2,q_2) \Longleftrightarrow p_1\cdot q_2=p_2\cdot q_1$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1,5)$.
3. On note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. Montrer que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Remarque : Cette méthode est la façon la plus simple de construire l'ensemble $\mathbb{Q}$. La bijection prouve que toutes les constructions de $\mathbb{Q}$ possibles donnent le "même" ensemble.

Exercice 4.
On pose sur $(\mathbb{R}^2)^*$: $\vec{u}\mathcal{R}\vec{v} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\vec{u}=(-2,1)$.

Exercice 5.
On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par :
$(a,b)\preceq(c,d) \Longleftrightarrow [a<c$ ou $a=c$ et $b\leq d]$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$.
   S'agit-il d'une relation d'ordre totale ?
   L'ensemble $\mathbb{N}^2$ a-t-il un plus grand élément ?
2. Les parties $A=\{(p,p),p\in\mathbb{N}\}$ et $B=\{(2,10^p),p\in\mathbb{N}\}$ sont-elles majorées ?
   Si oui, ont-elles un plus grand élément ?
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ a un plus petit élément.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6.
Soient A et B deux parties de E et F. Soit f une application de E dans F. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F.

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer le nombre de couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq j \leq n$.
   (b) Calculer le nombre de triplets d'entiers (i, j, k) tels que $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$.
   On pourra utiliser la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   (c) On lance 3 dés (à 6 faces) et on range les chiffres obtenus dans l'ordre croissant. Combien de résultats différents sont possibles ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer le nombre de couples d'entiers naturels $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = n$.
   (b) Calculer le nombre de couples d'entiers naturels $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + 2j = n$.

Exercice 8.
Soit p_n le nombre de mots de n lettres, formés uniquement des lettres "a" et "b", et qui ne contiennent pas deux "a" consécutifs. Par exemple, $p_3 = 5$ car les mots possibles sont "aba", "abb", "bab", "bba" et "bbb".

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par p_n.
2. En déduire p_n.