Feuille de TD n° 3

Sup et inf, Groupes, Coefficients binomiaux

18 mars 2022

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.
Dire si ces ensembles avec ces lois de composition sont des groupes. Si oui, dire s'ils sont commutatifs ou non.

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Z}, -)$
3. $(Fonct(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +)$
4. $(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \times)$
5. $(P(E), \cup)$
6. $(P(E), \cap)$
7. $(P(E), \Delta)$, pour $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

Tous les groupes ici sont commutatifs.

1. Oui.
2. Non. La loi n'est pas associative : $a - (b - c) \neq (a - b) - c$ pour certains entiers a, b, c.
3. Oui.
4. Non. Les polynômes non-constants n'ont pas d'inverse.
5. Non. L'élément neutre est $\emptyset$ mais toutes les parties non-vides n'ont pas d'inverse.
6. Non. L'élément neutre est E mais toutes les parties différentes de E n'ont pas d'inverse.
7. Oui. Le plus long est de montrer l'associativité. Ensuite, l'élément neutre est $\emptyset$, et l'inverse de A est A.

Exercice 2.
Construire une loi de composition interne $\star$ sur $G = \{e, a, b\}$ telle que $(G, \star)$ soit un groupe.
On écrira la table des opérations de $\star$.

Un choix possible est : $e \star e = e$, $e \star a = a \star e = a$, $e \star b = b \star e = b$.
$a \star a = b$, $a \star b = b \star a = 0$.
$b \star b = a$.
L'élément neutre est e, l'inverse de e est e, l'inverse de a est b.
Il faut vérifier que la loi est bien associative.
Cela donne alors un groupe commutatif.

Exercice 3.
Soit $(G, \star)$ un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.
Montrer que le groupe G est commutatif.

Soient $x, y \in G$. Comme $x^2 = e = y^2$, on a $x^{-1} = x$ et $y^{-1} = y$.
On a aussi $(xy)^2 = e = xyxy$.
Ainsi, on en déduit que $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Donc G est commutatif.

Exercice 4. Le groupe $\mathfrak{Q}$ des quaternions (\四元群\) est le groupe engendré par deux éléments distincts i et j, dont on note l'élément neutre e (différent de i et j), et qui vérifie les propriéés suivantes :
Pour $k = ij$ et $m = i^2 \neq e$, on a

$$i^4 = j^4 = e, \ i^2 = j^2 = m, \ k = ij = mji.$$

Ainsi, on trouve par exemple $k^2 = mjiij = mj^4 = m$.

1. Montrer que $\mathfrak{Q} = \{e, m, i, i^3, j, j^3, k, k^3\}$ est stable par multiplication : on

écrira le tableau de multiplication des éléments de $\mathfrak{Q}$

$\circ$	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
e	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
m	m							
i	i							
i^3	i^3							
j	j							
j^3	j^3							
k	k							
k^3	k^3							

.

2. Vérifier que $\mathfrak{Q}$ est un groupe (on admettra que la loi est associative !).
3. Combien a-t-il d'éléments ?
4. Est-il commutatif ?

---

1. On trouve

$\circ$	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
e	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
m	m	e	i^3	i	j^3	j	k^3	k
i	i	i^3	m	e	k	k^3	j^3	j
i^3	i^3	i	e	m	k^3	k	j	j^3
j	j	j^3	k^3	k	m	e	i	i^3
j^3	j^3	j	k	k^3	e	m	i^3	i
k	k	k^3	j	j^3	i^3	i	m	e
k^3	k^3	k	j^3	j	i	i^3	e	m

.

La loi est bien stable dans $\mathfrak{Q}$.

2. Tout élément est inversible. Il reste encore à montrer que la loi est associative. Vous pouvez le faire si vous le souhaitez !
3. Comme $\mathfrak{Q}$ est un groupe, $i \neq j$ et $m \neq e$, alors $i \neq i^3$ car sinon, $i^2 = m = e$. $k = ij \neq i$ car sinon $j = e$. $i \neq j^3 = mj = i^2 j$, car sinon $m = ij = e$. On vérifie ainsi que les éléments sont deux à deux distincts. Le groupe des quaternions a 8 éléments.
4. Le groupe n'est pas abélien car $ij = ji = mji$ implique $m = e$.

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, majorées pour $\leq$.

1. Démontrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Démontrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

A et B étant des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, elles admettent une borne supérieure. Donc $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent bien.

1. Supposons $A \subset B$. Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$, donc $\sup(B)$ étant un majorant de B, $a \leq \sup(B)$. Ainsi, $\sup(B)$ majore A. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit que $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. • Soit $x \in A \cup B$.
   1$^{\text{er}}$ cas : $x \in A$. Alors $x \leq \sup(A) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.
   2$^{\text{nd}}$ cas : $x \in B$. Alors $x \leq \sup(B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.
   Dans tous les cas, $x \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.

   • Maintenant, pour M un majorant de $A \cup B$, on a M qui majore A et M qui majore B. Donc, on a $M \geq \sup(A)$ et $M \geq \sup(B)$. D'ou $M \geq \max(\sup(A), \sup(B))$.
   On a donc $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(A \cup B)$.
3. • Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
   Or $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$. Donc $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.
   • On réutilise la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites de A et de B telles que $a_n \to_n \sup(A)$ et $b_n \to_n \sup(B)$.
   Alors la suite $(a_n + b_n)_n$ est dans $A + B$ et converge vers $\sup(A) + \sup(B)$.
   Donc, par caractérisation séquentielle du supremum, on obtient $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Soit $\lambda \geq 0$.
   • Soit $x \in \lambda A$. Alors il existe $a \in A$ tel que $x = \lambda a$.
   Comme $a \in A$, $a \leq \sup(A)$. On a donc $x = \lambda a \leq \lambda \sup(A)$.
   • Utilisons à nouveau la propriété séquentielle de la borne supérieure : il existe $(a_n)_n$ dans A telle que $a_n \to_n \sup(A)$.
   Donc, λa_n converge vers $\lambda \sup(A)$.
   Ainsi, par caractérisation séquentielle du supremum, on obtient que $\sup(\lambda A)\lambda \sup(A)$.

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 6.
Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$.

1. Construire une bijection entre l'ensemble des parties de E de cardinaux pairs et l'ensemble des parties de E de cardinaux impairs.
2. Quel est le nombre de parties de E qui ont un cardinal pair ?
3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

---

1. On fixe un élément $a \in E$. On construit alors l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\text{pair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{\text{impair}}(E) \\ F & \longmapsto & \begin{cases} F \cup \{a\} & \text{si } a \notin F \\ F \setminus \{a\} & \text{si } a \in F \end{cases} \end{array}.$$
φ est bijective de bijection réciproque $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\text{impair}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{\text{pair}}(E) \\ F & \longmapsto & \begin{cases} F \cup \{a\} & \text{si } a \notin F \\ F \setminus \{a\} & \text{si } a \in F \end{cases} \end{array}$.
2. Il y a donc autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Ainsi le nombre de parties de cardinal pair est la moitié du nombre total de parties de E, soit 2^{n-1}.
3. On a montré que
$$\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n}{2p+1},$$
ce qui donne
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$
On retrouve le résultat donné par la formule du binôme.

Exercice 7.

1. Démontrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \ldots + \binom{p-1}{p-1}$.
2. Démontrer que $\displaystyle\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{p-k}$.

---

1. On a la formule $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$, mais la même formule donne $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$ et on itère.
2. On considère un ensemble E à p éléments et un ensemble F à q éléments, avec $E \cap F = \emptyset$. On veut choisir p éléments dans $E \cup F$. Il y a $\binom{p+q}{p}$ possibilités. Mais on peut le faire de la façon suivante : pour $k \in [\![0, p]\!]$, on choisit k éléments dans E, ce qui fait $\binom{p}{k}$ possibilités, puis $p-k$ éléments dans F, ce qui fait $\binom{q}{p-k}$ possibilités.

   On peut aussi prouver cette formule en développant $(1+x)^{p+q}$ et $(1+x)^p(1+x)^q$, et en regardant le monôme x^p.

Exercice 8.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note B_n^p le nombre de n-uplets d'entiers naturels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = p$.

1. Calculer B_1^p et B_n^0.
2. Si $n \geq 2$, montrer que $\displaystyle B_n^p = \sum_{k=0}^{p} B_{n-1}^k$.
3. Montrer que $B_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
4. Retrouver ce résultat en ramenant le problème à la recherche d'anagrammes dans un alphabet à 2 lettres.

---

1. On a $B_1^p = 1$ et $B_n^0 = 1$.
2. On choisit la valeur de $x_1 \in [\![0, p]\!]$, il reste alors à choisir un $(n-1)$-uplet d'entiers $(x_2, \ldots, x_n)$ tel que $x_2 + \ldots + x_n = p - x_1$, ce qui fait $B_{n-1}^{p-x_1}$ choix. On a donc bien
$$B_n^p = \sum_{k=0}^{p} B_{n-1}^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} B_{n-1}^k.$$
3. On montre par récurrence forte sur p la proposition « $\forall n \geq 1$, $B_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ ».
   - **Initialisation :** Si $p = 0$, on a pour tout $n \geq 1$: $B_n^0 = 1 = \binom{n-1}{0}$.
   - **Hérédité :** Soit $p \geq 1$, on suppose que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, pour tout $n \geq 1$, $B_n^k = \binom{n+k-1}{k}$. Montrons par récurrence sur n la proposition « $B_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ ».
     - **Initialisation :** Si $n = 1$, on a bien $B_1^p = 1 = \binom{p}{p}$.

— **Hérédité :** Soit $n \geq 2$, on suppose que $B_{n-1}^p = \binom{n+p-2}{p}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
B_n^p &= \sum_{k=0}^{p-1} B_{n-1}^k + B_{n-1}^p \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+p-2}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-2}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{p} \left[\binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k-1} \right] \\
&= \binom{n+p-1}{p}.
\end{aligned}$$

4. On considère l'alphabet $\{\circ, +\}$. Un mot contenant p fois le caractère $\circ$ et $n-1$ fois le caractère $+$ correspond exactement à un n-uplet recherché : x_1 est le nombre de $\circ$ avant le premier $+$, x_2 est le nombre de $\circ$ entre le premier et le deuxième $+$, etc. Par exemple, $\circ\circ\circ + \circ + + \circ\circ$ correspond à $3+1+0+2=6$. On cherche donc le nombre de mots que l'on peut former avec p $\circ$ et $n-1$ $+$, ce qu'on a déjà fait dans le TD précédent. On obtient bien $\binom{n+p-1}{p}$.