Feuille de TD n° 9

Anneaux, déterminants

6 mai 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Pour chaque anneau A, donner son groupe des inversibles $A^\times$, et résoudre (si l'on peut) l'équation $a^2 = 1_A$.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. $\mathbb{K}[X]$
3. $M_n(\mathbb{K})$
4. $\mathcal{F}(E, \mathbb{C})$, pour E un ensemble.
5. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\, a, b \in \mathbb{Q}\}$

Dans quelle famille d'anneaux l'équivalence "$a^2 = 1_A$ ssi $a = \pm 1_A$" est-elle forcément vraie ?

Exercice 2.
• Donner le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Quel est son cardinal ?
• Donner un isomorphisme de groupes ϕ entre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, \times)$.
On ne demande pas de vérifier que ϕ est bien un isomorphisme de groupes.

Exercice 3. On pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. et $\mathbb{Z}[j] := \{a + jb \in \mathbb{C}/(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
2. Est-ce que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau ? Dire pourquoi.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$.
   Montrer que $z \in \mathbb{Z}[j]^\times \Leftrightarrow |z| = 1$
4. Soit $z = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$.
   Montrer que $z \in \mathbb{Z}[j]^\times \Rightarrow (a, b) \in \{-1, 0, 1\}^2$
5. En déduire l'ensemble $\mathbb{Z}[j]^\times$.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. *Déterminant de Vandermonde* : Soient a, b, $c \in \mathbb{K}$, montrer (avec des opérations sur les lignes ou colonnes) que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

2. En déduire une formule factorisée pour

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6.

1. Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$, on pose $a + b + c = 2p$.
   (a) Montrer que $\cos b - \cos a \cos c = 2\sin p \sin(p-b) - \sin a \sin c = -2\sin(p-c)\sin(p-a) + \sin a \sin c$.
   (b) Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 4\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c).$$