Feuille de TD n° 1 - Correction
11 septembre 2021

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On vérifie facilement que φ est une forme bilinéaire symétrique.
On obtiet que $\varphi(f,f) \geqslant 0$ avec les propriétés de l'intégrale d'une fonction positive.
De plus, on a :

$$\varphi(f,f) = 0 \implies f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f' = 0,$$

car la fonction f'^2 est alors continue, positive et d'intégrale nulle.
On en déduit que :

$$\varphi(f,f) = 0 \implies f = 0.$$

Cette forme bilinéaire est donc un produit scalaire.

Exercice 2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Etudier les cas d'égalités.

On considère le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$S\big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k * 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right) = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire : $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 3. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

- Donner la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- À quelle condition sur a, b, c, d cette forme bilinéaire est-elle symétrique ?
- À quelle condition sur a, b, c et d cette forme bilinéaire est-elle un produit scalaire ?

- Pour $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- Cette forme bilinéaire est symétriqie si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique. C'est-à-dire, si et seulement si $b = c$.
- Un produit scalaire est en particulier une forme bilin. sym.. On doit donc avoir $b = c$.

Pour $u = (x, y) \in E$, on doit avoir $\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2 \geqslant 0$. Posons $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$. On doit donc avoir $\varphi(u, u) = a > 0$ et $u(v, v) = d > 0$.

On a alors la factorisation :

$$\varphi(u, u) = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2.$$

Posons $u = (-b, a)$. On doit avoir $\varphi(u, u) > 0$, donc $b^2 < ad$.

Fixons y et regardons $\varphi(u, u)$ comme une fonction polynômiale de degré 2 en x. Comme $\varphi(u, u) \leqslant 0$, on doit alors avoir $\Delta = 4(b^2 - ad)y^2 \leqslant 0$.

Donc, des conditions nécessaires sont $a > 0, d > 0, b = c, b^2 < ad$.
Réciproquent, montrons que ces conditions sont suffisantes pour que φ soit un produit scalaire.

- (Forme bilinéaire) φ est bien une forme bilinéaire.
- (Symétrique) Comme $b = c$, φ est symétrique.
- (Positive) Pour tout $u = (x, y) \in E$, on a $\varphi(u, u) = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2 \geqslant 0$, car $a > 0$ et $b^2 < ad$.
- (Définiee) Si $\varphi(u, u) = 0$, on a $x + \frac{b}{a}y = 0$ et $(d - \frac{b^2}{a})y^2 = 0$. Comme $b^2 < ad$, on doit avoir $y = 0$, et $x = -\frac{b}{a}y = 0$, donc $u = (0, 0)$.

Donc, φ est un produit scalaire.

Exercice 4. Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Montrer que l'on a :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\| \, \|y\|}$$

On élève les termes au carré, et on développe les expressions pour obtenir :

$$\left|\left| \frac{x}{||x||^2} - \frac{y}{||y||^2} \right|\right|^2 = \frac{1}{||x||^2} - 2\frac{< x|y >}{||x||^2 \, ||y||^2} + \frac{1}{||y||^2} = \left(\frac{||x-y||}{||x|| \, ||y||} \right)^2 .$$

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 5. On considère $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour f strictement positive sur $[a,b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f) \geqslant (b-a)^2$.
Etudier les cas d'égalités.

Comme $f(t) > 0, \forall t \in [a,b]$, on peut défnir $f_1(t) = \sqrt{f(t)}$ et $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$, pour $t \in [a,b]$.
Ces fonctions sont de plus continues sur $[a,b]$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$(f_1|f_2)^2 = (\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt)^2 = (b-a)^2 \leqslant ||f||||g|| = \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt = \ell(f).$$

De plus, on a le cas d'égalité quand f_1 et f_2 sont proportionnels, c'est-à-dire quand : $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f(t)} = c\frac{1}{\sqrt{f(t)}}, \forall t \in [a,b]$.
Cela donne $f(t) = c, \forall t \in [a,b]$.

Exercice 6. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

On considère le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose $X = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$, $Y = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$||X||.||Y|| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant < X|Y >^2 = n^2.$$

De plus, le cas d'égalité est obtenu quand X et Y sont colinéaires, c'est-à-dire lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x_k} = c\frac{1}{\sqrt{x_k}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Cela donne donc $x_k = c$.

Or on a $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 = nc$. On obtient donc :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = c = \frac{1}{n}.$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 de E Montrer que :

$$\forall x, y \in S, \text{ si } x \neq y, \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R}, (1-t)x + ty \in S \iff t = 0 \text{ ou } 1.$$

Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

Soient $x, y \in \mathcal{S}$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$||(1-\lambda)x + \lambda y||^2 = \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) < x|y > +(1-\lambda)^2.$$

C'est un polynôme en λ dont le coefficient de degré 2 est $2 - 2 < x|y >$.
Comme les vecteurs x et y sont distincts et de même norme, ils ne peuvent pas être positivement liés. On a donc :

$$\langle x|y\rangle < ||x||\,||y|| = 1.$$

Cela donne

$$2 - 2\langle x|y\rangle > 0.$$

Ainsi, $||(1-\lambda)x + \lambda y||^2$ est un polynôme de degré 2 en λ.
Ce polynôme vaut 1 pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 1$, donc il ne peut valoir 1 pour aucune autre valeur λ, ce qui conclut.
Géométriquement, la droite passant par x et y intersecte la sphère unité S en exactement deux points : x et y.
De plus, pour $\lambda \in]0, 1[$ on remarque que $(1-\lambda)x + \lambda y$ est de norme < 1. Les vecteurs appartenant au segment reliant x à y, et différents des extrémités x,y, sont de norme strictement inférieure à 1.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel euclidien.
• Montrer que l'on a :

$$\forall x, x' \in E,\ \langle x|y\rangle = \langle x'|y\rangle\ \forall y \in E,\ \text{ si et seulement si } x = x'.$$

• Soit $f : E \to E$ une fonction surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$< f(x) \mid f(y) >=< x \mid y >$$

Montrer que f est une application linéaire.

• Si $x = x'$, alors $\langle x|y\rangle = \langle x'|y\rangle$, $\forall y \in E$.
Réciproquement, on a alors $\langle x - x'|y\rangle = 0$, $\forall y \in E$.
En prenant $y = y'$ on obtient :

$$\langle x - x'|x - x'\rangle = 0 \Rightarrow x - x' = 0 \Rightarrow x = x'.$$

• Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$< f(x + \lambda x')|f(y) >=< x + \lambda x'|y >=< f(x) + \lambda f(x')|f(y) > .$$

Comme f est surjective, cela donne :

$$< f(x + \lambda x')|z >=< (f(x) + \lambda f(x'))|z >, \forall z \in E.$$

D'après le premier point, on en déduit que

$$f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x').$$

Ainsi, f est une application linéaire.