

FEUILLE DE TD N° 10

Variables aléatoires

18 MAI 2022

Exercice 1. Soit $p \in]0, 1[$. Une personne fait 12 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité p de faire Pile.

Une deuxième personne fait 36 lancers de Pile ou Face, indépendants, avec probabilité $\frac{p}{3}$ de faire Pile. On note X la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la première personne, et Y la v.a. associée au nombre de Pile obtenus par la deuxième personne.

- Décrire les v.a. X, Y (image, loi de probas, espérance, variance)
- On se demande si l'on a plus souvent $X > Y$ ou $Y < X$. Quelle(s) quantité(s) faut-il calculer pour le savoir ?

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi géométrique de paramètres respectifs $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$. Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard uniforme une boîte, puis une boule dans la boîte. Soient X, Y les v.a. associées au numéro de la boîte et au numéro de la boule.

1. Déterminer la loi de probas de la v.a. (X, Y) .
2. Déterminer la loi de probas de Y , et donner son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 4.

• Calculer la fonction génératrice d'une v.a. X dont la loi de probas est la loi uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$.

• On prend deux dé à 6 faces, que l'on truque. On lance ces dés, de façon indépendante.

Soient X_1, X_2 les v.a. associées au résultats de chaque dé.

Ecrire la fonction génératrice de $X_1 + X_2$ en fonction des lois de probas (p_1, \dots, p_6) et (q_1, \dots, q_6) de X_1 et de X_2 .

• Peut-on truquer deux dés à 6 faces de sorte que la somme des faces obtenues en lançant les dés ait une loi de probas uniforme ?

Exercice 5. Soit $p \in]0, 1[$. On fait un Pile ou Face avec probabilité p de faire Pile. On lance la pièce de façon indépendante, jusqu'à obtenir Pile une deuxième fois.

On note X la v.a. qui donne le nombre de Face obtenus pendant les lancers.

1. Déterminer la loi de probas de X .
2. Montrer que X est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. On procède à l'expérience suivante :
Si X prend la valeur n , on place $n + 1$ boules dans une urne, numérotées de 0 à n .
Puis, on tire au hasard uniforme une boule de cette urne. On pose Y la v.a. associée au numéro obtenu.
Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
Calculer l'espérance de Y .
4. On pose $Z = X - Y$.
Donner la loi de probas de Z et vérifier que es v.a. Z et Y sont indépendantes.