Feuille de TD n° 3

Mesures de probabilité

18 mars 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $n \geq 1$. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$.

1. Exprimer la mesure de probas uniforme U sur $(E, \mathcal{P}(E))$ comme combinaison linéaire de mesures de Dirac δ_ω. On pose $f = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}\delta_n$.
2. Quelle expérience aléatoire peut être associée à la mesure de probabilité f ?
3. Calculer $f(\{1, n\})$ et $f(2\mathbb{N} \cap E)$.

---

1. On a $U = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k$.
2. Dans une expérience où on lance un dé à n faces, et que la face n est truquée (probabilité $1/2 + \frac{1}{2n}$ de sortir), on va associer la mesure de probabilité f.
   Ou bien, on prend des boules numérotées de 1 à n. Dans une urne, on place 1 copie des boules numéro $1, 2, \ldots, n-1$, et $n+1$ copies de la boule numéro n.
   Puis, sans biais (au hasard de façon uniforme), on tire une boule, et on regarde son numéro. L'ensemble E représente le numéro obtenu, et f sera la mesure de probas associée à l'expérience.
3. Pour $n = 1$ on a $f(\{1, n\}) = 1$.
   Sinon, on a $f(\{1, n\}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+2}{2n}$.
   Si n est impair, on a $f(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}U(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{4n}$.
   Si n est pair, on a $Card(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{n}{2}$. Donc, $f(2\mathbb{N} \cap E) = \frac{1}{2}\frac{n}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Exercice 2. Dans un jeu de 52 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de pique (♠) par un second as de pique.
Un joueur choisit au hasard de façon uniforme 3 cartes.

- Quel ensemble Ω et quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ faut-il prendre pour modéliser cette expérience ?
- Quelle est la probabilité qu'il s'aperçoive de la tricherie ?

Le joueur pioche 3 cartes parmi 52, sans remise. L'univers Ω est donc l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 52 éléments.
Si on numérote ces cartes de 1 à 52, en prenant par exemple que les deux as de pique ont les numéros 1 et 2, on obtient : $\Omega = \{A \subset \{1, \ldots, 52\}$ tels que $Card(A) = 3\}$.
Il y a $\binom{35}{3}$ cas possibles.
La pioche est au hasard de façon uniforme, donc on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
Il doit piocher les 2 as de pique pour se rendre compte de la tricherie.
Pour piocher les 2 as de pique, il faut donc piocher un ensemble de trois cartes qui contient ces deux as.
C'est équivalent à piocher une carte dans les 50 autres cartes qui ne sont pas des as de pique.
L'ensemble des cas favorables contient donc 50 éléments.
La probabilité est donc de $\frac{50}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{442}$.

Exercice 3. Soit $N > 0$. Une boîte contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On tire N boules successivement sans les remettre.

1. Donner l'ensemble Ω qui représente tous les tirages possibles.
   Calculer $Card(\Omega)$. On note l'événement.
   $$A : \text{« on tire au moins un numéro inférieur ou égal à } N \text{ »}$$
   .
2. Calculer $Card(\bar{A})$, et en déduire $Card(A)$.
   On suppose que les boules sont toutes identiques (sauf leur numéro), et qu'on mélange les boules de la boîte avant chaque tirage.
3. Quelle mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ correspond à cette façon de tirer les boules ?
4. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
5. En utilisant la formule de Stirling
   $$N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N},$$

étudier la limite de $P(A)$ quand N tend vers ∞ ?

---

1. Ω est l'ensemble de N-uplets de nombres entiers, à valeurs dans $\{1,\dots,2N\}$, qui sont tous distincts. C'est un sous-ensemble de $\{1,\dots,2N\}^N$, qui s'écrit aussi
$$\Omega = \{(n_1,\dots,n_N) \in [\![1,2N]\!] \forall i \neq j,\ n_i \neq n_j\}$$
Un tirage de N boules revient à choisir N numéros parmi $2N$, puis à les ordonner. Il y a $N!$ ordres possibles.
On a ainsi $Card(\Omega) = \binom{2N}{N}.N! = \frac{(2N)!}{N!}$.
2. L'ensemble $\bar{A}$ est donc :
$$\bar{A} = \{(n_1,\dots,n_N) \in [\![N+1,2N]\!] \forall i \neq j,\ n_i \neq n_j\}$$
Avec le même raisonnement, cet ensemble contient $\binom{N}{N}N! = N!$ éléments. D'où
$$P(\bar{A}) = \frac{(N!)^2}{(2N)!} \text{ et } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{(N!)^2}{(2N)!}$$
3. D'après la formule de Stirling, on a :
$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{(N!)^2}{(2N)!} \\ &\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}\right)^2}{\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}\sqrt{4\pi N}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi N}}{4^N} \end{aligned}$$
Donc quand N tend vers $+\infty$ la probabilité de $\bar{A}$ tend vers 0 et donc celle de A tend vers 1. Cela correspond à l'intuition : "quand N est grand, aussi grand que l'on veut, il est très rare de ne tirer aucune boule de numéro entre $N+1$ et $2N$".

Exercice 4. Soient $\Omega = \{a,b,c\}$ un ensemble et $x,\ y$ deux réels.
Montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que
$$\mathbb{P}(\{a,b\}) = x \text{ et } \mathbb{P}(\{b,c\}) = y$$
si et seulement si $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ et $x + y \ge 1$.
On pourra s'aider de l'exercice ..

Supposons qu'il existe une mesure de probas $\mathbb{P}$ vérifiant les propriétés. On a :

— $x = P(\{a,b\}) \in [0,1]$ et $y = P(\{b,c\}) \in [0,1]$;
— $1 = P(\{a,b,c\}) \le P(\{a,b\}) + P(\{b,c\}) = x + y$.

Réciproquement, supposons que x et y vérifient les trois inégalités.
On note :
$$p_2 = x + y - 1$$
$$p_1 = x - p_2$$
$$p_3 = y - p_2$$
On pose $\mathbb{P} = p_1\delta_a + p_2\delta_b + p_3\delta_c$. Les réels p_1, p_2, p_3 sont bien positifs, et on a $p_1 + p_2 + p_3 = x - p_2 + p_2 + y - p_2 = x + y - p_2 = 1$.
Donc, d'après l'exercice .., $\mathbb{P}$ est une mesure de probas.
On a de plus : $\mathbb{P}(\{a,b\}) = p_1 + p_2 = x$ $\mathbb{P}(\{b,c\}) = p_2 + p_3 = y$.

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Soient $A_n \subset \Omega$.
On appelle *limite supérieure* des A_n, notée $\limsup_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.
On appelle *limite inférieure* des A_n, notée $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.
2. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Ω.
Montrer que si $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ appartiennent aussi à $\mathcal{A}$.
3. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$;
   (b) $A_n =]-\infty, -n]$;
   (c) $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
   (d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

---

1. $\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \exists n \ge 0 \text{ t.q. } \forall k \ge n \text{ on a } \omega \in A_k\} = \bigcup_{n\ge0}(\bigcap_{k\ge n} A_k)$.
$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \forall n \ge 0, \forall k \ge n \text{ avec } \omega \in A_k\} = \bigcap_{n\ge0}(\bigcup_{k\ge n} A_k)$.
2. Ce sont des réunions dénombrables d'intersections dénombrables (ou intersec dénombrables de réunions dénombrables) d'éléments de $\mathcal{A}$. Donc, ces ensembles sont des éléments de $\mathcal{A}$.

3. $\liminf_n(]-\infty,n]) = \mathbb{R} = \limsup_n(]-\infty,n])$.
4. $\liminf_n(]-\infty,-n]) = \emptyset = \limsup_n(]-\infty,-n])$.
5. $\liminf_n A_n = A\cap B$, $\limsup_n A_n = A\cup B$.
6. $\liminf_n A_n =]-\infty,-1]$, $\limsup_n A_n =]-\infty,1]$.

Exercice 6. Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1,\dots,A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

On va procéder par récurrence sur $n\geq 1$. Le point clé est la formule

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B).$$

La propriété est vraie si $n=1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$ et $B=A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A\cup B)\leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 7. On place 11 boules dans une boîte. 10 boules bleues, 1 boule rouge.

1. Soit $n\geq 1$. On tire au hasard uniforme n boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans la boîte.
   Décrire l'ensemble Ω et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ associés.
2. Calculer p_1, la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.
3. On pose $E=\{B,R\}^n$ l'ensemble de toutes les répartitions de couleurs que l'on peut voir dans les tirages.
   Dans l'expérience du tirage, les ensembles Ω et E sont reliés. Trouver une fonction $X:\Omega\to E$ qui donne ce lien.
   Sur $(E,\mathcal{P}(E))$ on définit $\mathbb{P}_2$ par $\mathbb{P}_2(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
4. Montrer que $\mathbb{P}_2$ est une mesure de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_2(\{(B,\dots,B)\})$.
6. Pour tout $e\in E$, on pose k_e le nombre de B qui apparaissent dans e.
   Calculer $\mathbb{P}_2(\{e\})$ en fonction de k_e.
7. Pour $1\leq k\leq n$, en déduire déduire p_2, la probabilité de tirer exactement k boules bleues.

Remarque : La fonction $X:\Omega\to E$ est ce qu'on appelle une variable aléatoire. Avec elle on obtient par exemple de nouvelles mesures de probabilité sur des ensembles différents.

---

1. On tire n fois une boule dans un ensemble de 11 boules. On prend donc $\Omega=\{1,\dots,11\}^n$.
   On prend sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$. C'est elle qui modélise le "hasard uniforme", le fait que chacun des 11^n tirages ait la même probabilité d'arriver.
   Les boules ont 2 couleurs différentes. Cela revient par exemple à dire que les boules $1,\dots,10$ sont bleues, et que la boule 11 est rouge.
2. On pose A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent au moins une fois la boule rouge. On a alors $p_1=\mathbb{P}(A)=\frac{Card(A)}{11^n}$.
   Le complémentaire de A, $\bar{A}$, est l'ensemble de tous les tirages qui ne contiennent que des boules bleues. Pour chacune des n boules tirées, il y a 10 boules bleues possibles.
   Donc, $Card(\bar{A})=10^n$, et $p_1 = 1-\mathbb{P}(\bar{A}) = 1-(\frac{10}{11})^n$.
3. L'ensemble E a 2^n éléments.
   Posons $f:\{1,\dots,11\}\to\{B,R\}$ avec $f(1)=\ldots=f(10)=B$ et $f(11)=R$.
   On prend alors $X:\Omega\to E$ telle que $X(k_1,\dots,k_n) = (f(k_1),\dots,f(k_r))$.
   Les k_i représentent les boules tirées, et les $f(k_i)$ les couleurs que l'on voit (bleu, ou rouge).
4. Il faut vérifier les deux conditions d'une mesure de probabilités. On utilise les propriétés de $\mathbb{P}$ et de l'image réciproque.
   Ce résultat sera démontré par la suite en cours.
5. Pour $e=(B,\dots,B)$, on a $X^{-1}(\{e\})=\bar{A}$.
   Donc, $\mathbb{P}_2(\{e\})=\mathbb{P}(\bar{A}) = (\frac{10}{11})^n$.
6. Soit $e\in E$. On écrit $e=(e_1,\dots,e_n)$. Posons $I=\{i \text{ t.q. } e_i=B\}$.
   On a $Card(I)=k_e$.
   Ainsi, $X^{-1}(\{e\})$ est l'ensemble de tous les tirages $(a_1,\dots,a_n)$ tels que $a_i\in\{1,\dots,10\}$ si $i\in I$ et $a_i=11$ si $i\notin I$.
   Cet ensemble contient 10^{k_e} éléments.
   On a donc, $\mathbb{P}_2(\{e\}) = \frac{10^{k_e}}{11^n}$.

7. On a : $p_2 = \mathbb{P}_2(\{e \in E \text{ t.q. } k_e = k\}) = \sum_{e \in E \text{ t.q. } k_e = k} \mathbb{P}_2(\{e\})$.
Il y a k parmi n façons de disposer les boules bleues dans le tirage, donc il y a $\binom{n}{k}$ n-uplets e tels que $k_e = k$.
Avec le calcul de la question précédente, on en déduit que $p_2 = \binom{n}{k} \frac{10^k}{11^n}$.