FEUILLE DE TD N°

Sujet

23 mars 2022

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8} \quad , \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B})$.

On a $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2. Soient $N \geq 2$ et $p \in [0, 1]$.
On place N coffres dans une pièce. Avec une probabilité p on place un trésor dans l'un de ces coffres. Si on place le trésor, on choisit un coffre de façon équiprobable ("même probabilité").
• Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise l'expérience.
On pourra écrire la loi de la mesure de probas $\mathbb{P}$.
• Une personne a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'elle trouve le trésor dans le dernier coffre ?
• Donner un équivalent de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

• On prend $\Omega = \{0, \dots, N\}$.
Les nombres $1, \dots, N$ décrivent le numéro du coffre dans lequel est le trésor, et 0 désigne le fait que le trésor n'est dans aucun coffre.
Avec ce que dit l'énoncé, on a $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$, et $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{p}{N}$, pour tout $1 \leq i \leq N$ (proba p que le trésor soit dans un coffre, et la proba que le trésor soit dans un coffre donné ne dépend pas du numéro du coffre).
• Pour $1 \leq i \leq N$, considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i (c'est-à-dire $A_i = \{i\}$).
On a donc $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{p}{N}$, et tous ces événements sont disjoints. La probabilité que l'on demande de calculer est :

$$\mathbb{P}(A_n|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{N-1})$$

Mais

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{N-1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{p(N-1)}{N} = \frac{N - p(N-1)}{N}$$

et

$$\mathbb{P}(A_n \cap \overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{N-1}) = \mathbb{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_N|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}$$

Quand N tend vers $+\infty$, cette probabilité est équivalente à $\frac{p}{N(1-p)}$.

Exercice 3.
Soit $n \geq 2$.
Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte, sans pouvoir les distinguer.

1. Quel espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélise la situation de l'énoncé ?
2. Quelle est la probabilité q_1 que chaque lettre arrive à la bonne destination ?
3. On prend $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Quelle est la probabilité q_2 que les lettres numéro $i_1, \dots, i_k$ arrivent à la bonne adresse ?
4. Quelle est la probabilité p_n qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
   On pourra utiliser les propriétés de $\mathbb{P}$ et la formule de Poincaré de l'exercice 6.
5. Donner la limite de p_n quand $n \to +\infty$.

---

1. On a $\Omega = \{(a_1, \ldots, a_n)$, avec $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a_i \neq a_j$ si $i \neq j\}$. On prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de probas uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
   L'ensemble Ω est celui de toutes les répartitions de n lettres dans n boîtes aux lettres. On a $Card(\Omega) = n!$.
2. Il y a 1 seule répartition qui correspond. La probabilité est donc $q_1 = \dfrac{1}{n!}$.
3. Notons A_i l'évènement "la i-ème lettre arrive à bon port".
   Alors, on a $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$.
   On veut calculer la probabilité de l'événement $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Si les lettres $i_1, \ldots, i_k$ sont placées dans les bonnes boîtes aux lettres, il reste alors $n-k$ lettres à placer dans $n-k$ boîtes aux lettres.
   Il y a donc $(n-k)!$ dispositions possibles.
   Ainsi, $q_2 = \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.
4. On pose E l'événement "au moins une lettre arrive à bon port" : $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
   La probabilité cherchée est $p_n = \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
   Avec la formule de Poincaré, on obtient alors :
   $$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$
   La probabilité qu'aucune lettre n'arrive à bon port est $p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}$.
5. Quand n tend vers $+\infty$, ${}_n$ tend vers $1 - e^{-1} \sim 0,632$.

Exercice 4.

Soient $N \geq 2$ et $p \in [0,1]$. Une information I est transmise à l'intérieur d'une population de N personnes.
La première personne possède l'information I.
Chaque fois qu'une personne transmet son information, il y a une probabilité p pour qu'elle la transmette correctement. Il y a une probabilité $1-p$ pour qu'elle se trompe et transmette l'information contraire.

1. Quel est l'ensemble Ω qui modélise la situation ?
   On suppose que la mesure de probas $\mathbb{P}$ qui modélise la situation est construite.
   On pourra pose I_k :"l'information après k transmissions est I".
2. Traduire les informations de l'énoncé en termes de probabilités conditionnelles.
   Pour $n \geq N$, on note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit l'information I.
3. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
4. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
5. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$ lorsque N et n tendent vers $+\infty$.
   Qu'en pensez-vous ?

---

1. A chaque transmission, c'est l'information I ou l'information non-I qui circule. Comme chacune des N personnes aura I ou non-I comme information, on prend $\Omega = \{I, non-I\}^N$.
   Pour simplifier l'écriture, on peut prendre $\Omega = \{V, F\}^N$.
   Pour la mesure de probas $\mathbb{P}$, on
2. On a $\mathbb{P}(I_{k+1}|I_k) = p$, $\mathbb{P}(\overline{I_{k+1}}|I_k) = 1-p$, et $\mathbb{P}(I_{k+1}|\overline{I_k}) = 1-p$, $\mathbb{P}(\overline{I_{k+1}}|\overline{I_k}) = p$.
3. D'après la formule des probabilités totales, on a
   $$\mathbb{P}(I_{n+1}) = \mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)\mathbb{P}(I_n) + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})\mathbb{P}(\overline{I_n}).$$
   On en déduit que
   $$p_{n+1} = p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$
4. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie
   $$l = (2p-1) \times l + (1-p) \iff l = 1/2.$$
   On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,
   $$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$
   On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que
   $$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$
5. On distingue alors trois cas :
   - Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n.
   - Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n.
   - Si $p \in]0,1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale !

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout évènement A et B

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

On pourra commencer par vérifier que l'inégalité est vérifiée A si $A \cap B = \emptyset$.

Le cas $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ vient du fait que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{A}) \leq \frac{1}{4}$: étudier le maximum de $x(1-x)$ sur $[0,1]$. On a bien sûr $B \subset \overline{A}$.
Puis pour A et B est quelconque, on pose $A' = A \setminus A \cap B$ et

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A' \cup (A \cap B))\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4},$$

car différence de deux réels positifs inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n-1}p_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k$$

où

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

On procède par récurrence, le cas $n = 1$ s'écrivant $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$.
Posons $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et appliquons la formule

$$\mathbb{P}(B \bigcup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}\left(B \bigcap A_{n+1}\right)$$

Par récurrence,

$$\mathbb{P}(B) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n-1}p_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k$$

avec

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

et en posant $\widetilde{A}_k = A_k \bigcap A_{n+1}$ pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k\right) = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\widetilde{p}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\widetilde{p}_k$$

et

$$\widetilde{p}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(\widetilde{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \widetilde{A}_{i_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}).$$

Les p_k et les $\widetilde{p}_k$ et $\mathbb{P}(A_{n+1})$ au rang n permet de retrouver les p_k du rang $n+1$ avec le bon signe.