Feuille de TD n° 7

Variables aléatoires, espérance, variance

15 avril 2022

Exercice 1. Une famille a deux enfants. L'un des enfants est un garçon.
Quelle est la probabilité que le plus jeune soit un garçon ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

On suppose qu'un enfant est soit un garçon G soit une fille F, et qu'il y a probabilité 1/2 que l'enfant soit G ou soit F.
On suppose de plus que les sexes de chaque enfant sont des événements indépendants.
On veut considérer l'âge des enfants (le plus jeune, le plus vieux), donc il faut les ordonner.
Donc, le modèle probabiliste qui représente la situation est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{G, F\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de probas uniforme.
On veut calculer $\mathbb{P}(A|B)$ avec $A = \{(G, F), (G, G)\}$ et $B = \{(G, F), (F, G), (G, G)\}$ (le plus jeune est un garçon, sachant que l'un des enfants est un garçon).
On obtient $\mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3}$.

Exercice 2. A un jeu télévisé, on met 1 voiture et 2 chèvres derrière 3 portes.
Le candidat doit choisir une porte, et il gagne ce qu'il y a derrière.
Un candidat choisit une porte. Le présentateur ouvre alors une autre porte, qui cachait une chèvre.
Le présentateur propose au candidat de changer de porte, pour gagner ce qu'il y a derrière.
Le candidat doit-il garder sa porte, ou changer pour l'autre porte ?
Indiquer toutes les hypothèses à ajouter à cet énoncé pour obtenir un espace probabilisé qui permet de calculer la probabilité demandée.

On suppose que les portes sont numérotées, pour les distinguer. On note V la voiture, et C les chèvres.
On suppose que la voiture et les chèvres sont répartis derrière les portes de façon uniforme.
On peut supposer que le candidat choisit au hasard uniforme sa porte. Pour l'ordre des portes, on peut donc supposer qu'il choisit la porte no.1.
Le présentateur ouvre la porte no.2 ou la porte no.3 (une porte qui contient une chèvre C).
La porte restante est alors la porte no.3 ou la porte no.2. L'espace probabilisé qui modélise cet énoncé est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{(V, C, C), (C, V, C), (C, C, V)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la mesure de probas uniforme.
Il y a 3 situations possibles toutes avec la même probabilité.
Avec (V, C, C) le candidat gagne la voiture en gardant la porte no.1.
Avec (C, V, C) ou (C, C, V), le candidat gagne la voiture en changeant de porte.
Donc, le candidat doit toujours changer de porte, car cela lui donne une probabilité de $\frac{2}{3}$ de gagner la voiture.

Exercice 3. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
• On suppose que X, Y sont intégrables.
Est-ce que XY est toujours intégrable ?
On suppose de plus que pour tous $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$, les événements $X^{-1}(\{x\})$ et $X^{-1}(\{y\})$ sont indépendants.
Montrer alors que XY est intégrable, et que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

• Non.
Prenons en contre-exemple la v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ donnée par la loi de probas $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}_X(\{n\}) = \frac{a}{n^3}$, avec $a = \frac{1}{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}}$.
Cela définit bien une mesure de probas car $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_X(\{n\}) = 1$.
On a alors $\mathbb{E}(X) = a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$, mais $\mathbb{E}(X^2) = a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$.
Donc X^2 n'est pas intégrable.
• On a $\mathbb{E}(|XY|) = \mathbb{E}(|X||Y|) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} |x||y| \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Or, par indépendance d'événements, on a $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.
On obtient donc, par sommabilité et par produit de séries, que $\mathbb{E}(|X||Y|) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) |y| \mathbb{P}(Y = y) = (\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x))(\sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \mathbb{P}(Y = y)) = \mathbb{E}(|X|)\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$.
Ainsi, la v.a. XY est intégrable.
Le même calcul de produit de Cauchy montre que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4. On lance deux dés équilibrés de façon indépendante. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.
On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de probas X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
   On pourra utiliser l'exercice précédent.

---

1. Pour $i = 1, \ldots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   - A : $U_1 = i$ et $U_2 = i$;
   - B : $U_1 = i$ et $U_2 > i$;
   - C : $U_1 > i$ et $U_2 = i$.

   Par indépendance des des résultats entre les deux dés, on en déduit que
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{36}, \ \mathbb{P}(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } \mathbb{P}(C) = \frac{6-i}{36}.$$
   Il vient $\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{1 + 2(6-i)}{36}$ et donc : $\mathbb{P}(X = 1) = 11/36$, $\mathbb{P}(X = 2) = 9/36$, $\mathbb{P}(X = 3) = 7/36$, $\mathbb{P}(X = 4) = 5/36$, $\mathbb{P}(X = 5) = 3/36$, $\mathbb{P}(X = 6) = 1/36$. On en déduit $E(X) = 91/36$.
2. On a $X+Y = U_1+U_2$ car (U_1, U_2) est une permutation de (X, Y). Il vient $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = E(U_1) + E(U_2) = 7$, puisque chaque U_i a une loi de probas uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$, son espérance vaut $(6 + 1)/2 = 7/2$.
   On en déduit $E(Y) = 161/36$.
3. On a $XY = U_1 U_2$. On en déduit d'après l'exercice précédent que
   $$E(XY) = E(U_1 U_2) = E(U_1)E(U_2).$$
   D'où
   $$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1225}{1296}.$$